# EL TEOREMA DE FERMAT

$c^n + r^n$

CARLOS CHUEZ

CELA

**CARLOS CHUEZ**

# EL TEOREMA DE FERMAT

## EL TEOREMA DE FERMAT

**AUTOR: CARLOS CHUEZ**

**PRIMERA EDICIÓN: CENTRO DE ESTUDIOS LATINOAMERICANOS (CELA) "JUSTO AROSEMENA". PANAMÁ SEPTIEMBRE 1992.**

**SEGUNDA EDICIÓN.**
**PANAMÁ**
**JUNIO DE 2008**

**NUEVA REVISIÓN**
**PANAMÁ ABRIL 2011**

**DISEÑO DE PORTADA Y PROGRAMACIÓN:**

EDESIGN <web & multimedia solution>
http//www.edesign.com.pa

**ISBN 84-8385-016-8**

## AGRADECIMIENTO

Con todo el respeto y aprecio al **Doctor César Garrido**, profesor de física, por la revisión y presentación del Libro EL "**TEOREMA DE FERMAT**" en Salón de Profesores de la **FACULTAD DE HUMANIDADES** en diciembre de 1992.

## DEDICATORIA

Con mucha gratitud y estimación dedico este libro titulado "**EL TEOREMA DE FERMAT**" y otros **ensayos** al distinguido y respetado **Doctor Edberto Agard**, **Profesor Titular del Departamento de Matematicas de la Facultad de Ciencias Exactas**, **Naturales y Tecnología de la Universidad de Panamá**. Con las excelentes y atinadas enseñanzas dictadas en el **Primer Semestre académico de 1963** por el **profesor Agard**, logré el aprendizaje y entendimiento de los fundamentos y elementos esenciales del **Calculo Infinitesimal**. Sin esa poderosa herramienta matematica del saber científico, no hubiera elaborado mis ensayos de Matemáticas, Física, Epistemogía y Filosofía de las Ciencias Naturales.

ÍNDICE

PRÓLOGO

## PRIMERA PARTE



## SEGUNDA PARTE



## CONCLUSIÓN

## *EXPLICACIÓN AL LECTOR:*

*Cuando un autor propone ante la opinión pública y, en particular a especialistas y eruditos, un proyecto de solución de un problema sumamente difícil y complejo, debe explicar previamente de un modo sencillo y evidente la metodología y los procedimientos utilizados para resolverlo. Con esas indicaciones previas, el lector podrá orientarse debidamente en la lectura o investigación que conciernen a todos los pasos y trayectorias que se exponen en esa propuesta de solución, evitando las suposiciones y especulaciones.*

***En la Primera Edición del libro, El Teorema de Fermat, publicada en septiembre de 1992, cometí la grave falta de no explicarle al lector qué fue lo que hice en esa propuesta de solución del Teorema****. El motivo se concretó en que no tuve conciencia de la importancia que tiene publicar un libro de tal valor y magnitud en el mundo de las matemáticas. Además, lamento que la obra se editara con algunos errores, tal vez por algún descuido de la empresa editora. Para resolver esa situación en vez de hacer unas cuantas impresiones del texto original lo que hice fue una Fe de Erratas, que en realidad no remedió el problema. Esa falta la cometí porque en ese tiempo mi mente estuvo dominada por ciertas ideas para explicar y resolver otros problemas matemáticos.*

*Por motivos de honestidad y sinceridad confieso que no tengo estudios de licenciatura y postgrado en matemáticas, pero siempre, desde niño, he tenido una afición intelectual por esa ciencia.* ***Sólo cursé un primer semestre*** *(****1963****)* ***de Cálculo Infinitesimal y de Física en la Universidad de Panamá****.*

*Desde septiembre de 1969, motivado por la lectura del* ***Discurso de Método de Descartes*** *me propuse recordar como un reto a mi capacidad intelectual, los conocimientos matemáticos que me habían enseñado los profesores en el colegio de enseñanza secundaria y en la Universidad sin consultar libros de esa asignatura. Comencé con la multiplicación y división algebraicas. Sin embargo, muchos conceptos y operaciones matemáticas se me habían olvidado, por lo que tuve que resolverlos, por ejemplo, el* ***Teorema de Pitágoras*** *y las ecuaciones cúbicas y de cuarto grado. Además, tuve la osadía de tratar de encontrar un procedimieto de* ***cómo calcular los dígitos de π****, y después de mucho tiempo concebí uno de los procedimientos para calcular dichos dígitos (en 1980). También* ***traté de calcular los dígitos de las funciones trigonométricas y de los logaritmos obteniendo importantes logros****.* ***E intenté buscar una solución a la ecuación de quinto grado, y después de dos años me informé*** *que no tiene solución (demostrada por* ***Niels Abel****).*

*A inicios de 1982 comencé a reflexionar sobre lo que sabía de la* ***Teoría Especial de la Relatividad****. Entonces un tiempo lo dedicaba a las Matemáticas y otro a la Física, sin dejar de prepararme y estudiar de modo académico la filosofía. Además, comencé a estudiar y meditar sobre la* ***Teoría del Big Bang*** *(****George Gamow****) y la del* ***Estado Estacionario*** *(****Fred Hoyle****). Tuve especial interés sobre la segunda, pero posteriormente acepté la primera* ***Teoría*** *porque advertí que se sustenta en los avances científicos que se han logrado por los nuevos descubrimientos de la Física y Astronomía.*

*En los años de 1986 y 1987 me dediqué a demostrar los teoremas del Cálculo Infinitesimal, y en los intentos de solución de éstos, había realizado notables avances. Pero, cuando mis pensamientos estaban inmersos en esos problemas, un recién graduado en Licenciatura y docencia en Matemáticas me dijo de modo convincente que "****por qué perdía mi tiempo***

***tratando problemas que ya se habían resuelto, y por qué no trataba aquéllos que todavía no se habían solucionado, por ejemplo, el Teorema de Fermat****". Después que el recién graduado me brindó ese prudente consejo, comencé a averiguar sobre el tema. Me planteé y reflexioné sobre ese problema matemático. Como desconocía los importantes e imprescindibles avances que se habían logrado al respecto (y* ***en Panamá no hay libros que traten sobre esos temas****), pensaba que por la vía de la geometría era imposible resolver el Teorema porque, según mi punto de vista, implica infinitas dimensiones. Pero ignoraba que la solución radica en las elípticas, y ahora lo concibo de un modo evidente. Sin embargo, hasta la fecha no conozco el texto de la solución de* ***Andrew Wiles****.*

*Desde enero de 1974 soy profesor de filosofía en la* ***Universidad de Panamá****. Posteriormente tuve la fortuna de que esta Institución de Estudios Superiores me brindara, al igual que a otros profesores, horas de investigación. Como tenía tiempo completo y el mínimo de labor docente semanal es de doce (12) horas, completaba el horario con horas de investigación filosófica. Ese horario me permitió estudiar una (1) hora diaria en esa labor. Como vivía cerca de la Universidad, dispuse del tiempo requerido para dedicarle por lo menos diez (10) horas diarias, sin excepción, y durante casi cinco (5) años al estudio, investigación, análisis y reflexión al intento de resolver el* ***Teorema de Fermat****.*

***¿Cómo es el proyecto que concreté para tratar de lograr una solución a ese difícil Teorema?*** *La estrategia teórica la implementé, en primer término, que es lo usual, estudiando y analizando la fórmula* $a^2=b^2+c^2$*. De este modo encontré el procedimiento por medio del cual se calcula cuando los valores de* $a$*,* $b$ *y* $c$ *son números enteros positivos. Ese procedimiento es muy conocido en la* ***Historia de las Matemáticas****. En segundo término, investigo y expongo las demostraciones parciales del* ***Teorema****. En tercer término, estudio y analizo la forma y estructura del* ***Binomio de Newton*** *y trato de establecer un vínculo conceptual (matemático) con el Teorema. En cuarto término, trato de demostrar el Teorema en tanto el valor del exponente de* $n$ *sea impar y también si es un número primo mayor que tres (3). Para esa solución utilicé el procedimiento (o teoría) de grupo finito (cuyos elementos son posibles). En quinto término, intento demostrar el Teorema cuando el valor del exponente de* $n$ *es par, y sólo si está constituido por factores pares e impares. Por ejemplo,* $n$*=6, 10, 12, 14, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30,…, 130,…, pero debe resolverse por el factor impar. En sexto término, procuro demostrar el Teorema, cuando el valor del exponente de* $n$ *es constantemente par, por ejemplo,* $n$*=4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024,…Y* ***con el conjunto de estas tres soluciones procuro hacer una demostración general del Teorema de Fermat****.*

*Finalmente le informo al lector que en la primera revisión que hice de este proyecto de solución de ese problema matemático encontré un error insignificante. Pero éste se corrige en la secuencia de los argumentos presentados en el texto. Posteriormente he realizado más de treinta revisiones y no he encontrado errores.*

***Como corolario de estos estudios, análisis y reflexiones, concebí una generalización del Teorema que expreso en la siguiente conjetura: Si en la fórmula*** $b^n+c^n+d^n+e^n+f^n+\ldots+t^n=a^n$***, el valor del exponente de la n es mayor que el número de las potencias que forman los términos del primer miembro de la ecuación, el valor de la suma no puede ser una potencia cuya base sea un número entero positivo o ningunas de las bases de las potencias pueden ser simultáneamente números enteros positivos****. En el caso contrario en que* $b^3+c^3+d^3=a^3$*, si asignamos a* $a$*,* $b$*, y* $c$ *los respectivos valores 3, 4 y 5, la ecuación tiene solución:* $3^3+4^3+5^3=6^3$*. Pero si el valor del exponente* $n$ *es mayor que el número de los términos que forman la fórmula* $b^n+c^n+d^n=a^n$ *no existe solución. Por* *ejemplo:* $\boldsymbol{b^4+c^4+d^4=a^4}$; $\boldsymbol{b^5+c^5+d^5=a^5}$; $\boldsymbol{b^6+c^6+d^6=a^6}$, *y así sucesivamente. Y generalizando, para las fórmulas* $\boldsymbol{b^5+c^5+d^5+e^5=a^5}$; $\boldsymbol{b^6+c^6+d^6+e^6+f^6=a^6}$; $\boldsymbol{b^7+c^7+d^7+e^7+f^7+g^7=a^7}$, *etc., no tienen soluciones.*

*Con cierto optimismo, pienso que esa conjetura pudiera resolverse con mi propuesta de solución que implementé en el* ***Teorema de Fermat****. Y también, con mayor razón debe resolverse con el modelo matemático de* ***Andrew Wiles****.*

*Deseo añadir que cuando terminé mis ensayos matemáticos, continué la investigación y estudios sobre* ***las teorías Especial de la Relatividad, la Cuántica y del Big Bang y sus vínculos teóricos****. Actualmente estoy dedicado al estudio, investigaciones y reflexiones filosóficas.*

***Panamá, abril de 2011****.*

## Prólogo

Los problemas de frontera de la Ciencia no son los únicos que se presentan en el conocimiento científico. Una vez que los grandes programas de investigación, para usar la terminología de **Lacatos**, alcanzan su nivel pleno de desarrollo quedan innumerables problemas, algunos de gran interés, por solucionar. Es así como recientemente en Panamá han aparecido algunos trabajos que, desde las trincheras de la filosofía, han abordado problemas de lógica, física o matemáticas con vigencia como temática de estudio. Así tenemos la Física y Metafísica de **Iván Colorado**, el Aleph-Cero de **José J. Martínez** y dos monografías del autor de esta obra que versan sobre la **Teoría de la relatividad especial de Einstein**.

**Carlos Chuez** es, sin duda un filósofo de inquietudes intelectuales muy proclive a la epistemología, importante en estos tiempos de la revolución del conocimiento. Así, como el panameño **José J. Martínez** va tras el **Dios y el transinfinito de Georg Cantor**, **Chuez** se sumerge en esta obra en el intrincado mundo de los números enteros del alejandrino **Diofanto**. El enfoque de la obra no parte de la moderna teoría de los números sino como él mismo afirma, de un concepto que denomina **grupos simétricos** expresados en series infinitas. Un método basado en la teoría de la divisibilidad de los números, como dirían los matemáticos.

Esta obra, es un ensayo de demostración del denominado ***Gran Teorema de Fermat***. La existencia de soluciones en números enteros para las ecuaciones algebraicas de grado superior al segundo, o sea n>3, con tres incógnitas, fue objeto de interés por el francés ***Pierre de Fermat*** (1601-1665), quien formuló un problema matemático conocido como el último ***Gran Teorema de Fermat***. Este teorema, jugó un papel importante en el desarrollo de las matemáticas por la gran cantidad de ensayos que se hicieron para demostrarlo. La historia del problema registra la organización en Alemania en 1909 de un gran concurso público que premiaba al que demostrara dicho teorema y que llevó a la publicación de una gran cantidad de aportes que enriquecieron la teoría analítica de los números. En intentos posteriores en la solución de este teorema se introdujeron conceptos numéricos más complejos que los números enteros ordinarios, como los anillos de números algebraicos, que llevó a la creación de la denominada teoría de los ideales.

Es interesante señalar que los problemas de la teoría de los números fueron abordados ya desde la antigüedad por ***Pitágoras*** y ***Diofanto*** de ***Alejandría****,* y más tarde por relevantes matemáticos del ***siglo XVIII,*** como ***Leonard Euler*** y ***Joseph Louis Lagrange***. ***Euler*** llegó a llamar análisis de ***Ecuaciones Diofánticas*** a las ecuaciones o sistemas de ecuaciones con coeficientes enteros con soluciones en números enteros, naturales o racionales. El ***Gran Teorema*** no ha sido demostrado para cualquier valor de n que sea mayor que tres y esta obra es un intento de análisis y explicación del mismo. Hay que añadir que es también difícil determinar mediante el ***análisis diofántico***, la existencia de un número finito o infinito de soluciones.

Observamos que los elementos básicos usados con un ***enfoque diofántico***, en este ensayo del profesor ***Chuez*** son: la divisibilidad de los números, el uso de una combinatoria recurrente en el ***binomio de Newton***, el empleo de la inducción en la comparación de combinaciones numéricas exponenciales.

Este trabajo, constituye un estímulo para el lector interesado en el análisis de los números. Su lectura sólo exige conocimientos muy generales de álgebra que se estudia en cualquier colegio, y un poco de acuciosidad. También, es un argumento analítico interesante para el lector -usuario de computadoras personales- quien podrá elaborar programas para ir determinando valores de n que sean mayores que dos para los cuales es válido el ***Gran Teorema de Fermat***, con la finalidad de confirmar o rebatir los resultados obtenidos por el autor de este libro.

***Doctor César Garrido***.

## INTRODUCCIÓN

***Este ensayo es una propuesta de solución del Teorema de Fermat, cuyo enunciado es el siguiente: Si la suma de dos potencias se expresa como una potencia y sus exponentes, iguales entre sí, son números enteros positivos mayores que dos, los tres valores de las bases de dichas potencias no pueden ser simultáneamente números enteros positivos. Matemáticamente el teorema se expone así: $b^n+c^n=a^n$. Si el exponente de la n es un número entero positivo mayor que 2 y el valor de dos de las bases de las potencias son números enteros positivos, el tercero no puede serlo.***

En este ensayo, sometemos a un minucioso análisis las pruebas que formulamos para resolver las dificultades inherentes al teorema. **La deducción que es el enlace lógico de los conceptos, la realizamos por una construcción de implicaciones de hipótesis que constituye una estructura compleja en una demostración sistemática y rigurosa**. No se trata de concretar el proceso demostrativo en la construcción de un solo argumento sino en un sistema estructurado de argumentos unidos por inferencias matemáticas.

Si la **crítica matemática** juzgara que no hay tal demostración en nuestra propuesta por lo menos aspiramos lograr un aporte en la descripción, explicación y análisis matemático del teorema expresado en una estructura lógica coherente y sistemática.

Esta propuesta de demostración del **Teorema de Fermat**, se basa en la descripción y análisis de la estructura del **binomio de Newton**. Este studio, nos ha permitido expresar dicha estructura en grupos simétricos. Y en la síntesis de los elementos simétricos, tratamos de resolver el teorema. La objeción fundamental que se puede hacer a este procedimiento radica en su validez matemática. Y esperamos que los especialistas en las matemáticas juzguen este intento de solución, e indiquen los defectos y errores que inconscientemente podríamos haber incurrido, y, además, señalen los posibles logros matemáticos en cuanto a procedimientos estructurales y sistemáticos.

Igualmente, que las ideas y experiencias contenidas en esta propuesta teórica en que tratamos de resolver el **Teorema de Fermat**, proporcionen algún valor y utilidad a la investigación matemática.

Esta obra se divide en tres partes. **La primera** trata sobre las demostraciones parciales del **Teorema de Fermat**. **La segunda**, se refiere a una serie resultante del **binomio de Newton**, y su conversión en otras serie equivalentes. Los coeficientes de los términos de esa serie, los expresamos en una fórmula factorial. **La tercera** parte trata sobre **cinco demostraciones específicas** del Teorema de Fermat $\mathbf{b^n+c^n=a^n}$. **La primera demostración**, se refiere al teorema cuando el exponente **n** es impar y mayor que tres. En la **segunda demostración**, tratamos de resolver el teorema cuando el exponente **n** es un número primo mayor que tres. En la **tercera demostración** descomponemos el valor de **n** cuando es par pero constituido por un número impar, y resolviéndolo a través de éste. En la **cuarta demostración**, intentamos demostrar el teorema para valores en que **n** es constantemente par. Y, como resultado de las **cuatro demostraciones específicas** construimos una **quinta demostración general del teorema**.

**En esta propuesta de solución del Teorema de Fermat elaboramos las demostraciones cuando el exponente n es mayor que 3 y no que sea mayor que 2. Porque la dirección y procedimientos del planteamiento y de la estructura matemática general de las demostraciones, implican que el teorema debe resolverse cuando el exponente n es mayor que 3. Por lo tanto la demostración de la fórmula $b^3+c^3=a^3$ la hacemos independientemente del contexto de las demostraciones especificas**.

**Las demostraciones las desarrollamos por medio de hipótesis**, que resolvemos por medio de pruebas basadas en las evidencias y el análisis matemático. Además, procuramos, en lo posible no contravenir los criterios matemáticos actuales.

Estos criterios comenzaron a formarse, a finales del **Renacimiento** y comienzos de la **Modernidad**. En esos períodos históricos **se inició un nuevo y revolucionario pensamiento matemático** que permitió la solución de las **ecuaciones cúbicas y de cuarto grado**, la **teoría de los logaritmos**, la **geometría analítica**, el **cálculo infinitesimal**, **nuevos desarrollos en el álgebra**, **la geometría** y, posteriormente, las **geometrías no-euclidianas** y el **análisis matemático**.

¿**En qué consiste el fundamento epistemológico de las matemáticas**? Uno de los grandes teóricos de las matemáticas, **Descartes** (1596-1650), afirma que la evidencia y el análisis combinado en una **unidad sistemática**, constituye el **método matemático**. Se puede decir que **Descartes fue el primero que intentó demostrar el modo de proceder del pensamiento matemático**. Para este filósofo y matemático **la evidencia es una intuición de los elementos y estructuras del objeto matemático**. **El análisis es el procesamiento de esas estructuras y elementos basados en la evidencia, y que finaliza en un reconocimiento y reordenamiento lógico de las partes**.

¿Por qué no se ha podido resolver el **Teorema de Fermat,** a pesar de los grandes avances de las matemáticas en los tres últimos siglos? La razón de ello se debe a las evidencias y estructuras dominantes en el saber matemático actual. Se necesitarían otras evidencias y estructuras que permitan la solución del **Teorema de Fermat**, y de otros problemas matemáticos. Las evidencias y estructuras análiticas forman los contenidos de los criterios matemáticos. Sin embargo, nuestra propuesta no puede seducir el juicio matemático actual. Porque no es posible poner en duda el criterio matemático ya que éste se fundamenta en evidencias, estructuras de conceptos implicantes y en el análisis.

Y es probable que **Pierre de Fermat**, al enunciar su **teorema** tuviera la solución. Algunos afirman que había resuelto el teorema y otros expresan lo contrario. Si **Fermat** realmente demostró el teorema algún día debe resolverse. Pero para lograrlo, deben establecerse enlaces lógicos e implicaciones matemáticas en estructuras coherentes y sistemáticas, que permitan unir en un ordenamiento deductivo de las hipótesis, proposiciones y pruebas.

Panamá, Septiembre de 1992.

## PRIMERA PARTE

## SOBRE LA SOLUCIÓN DE $b^n+c^n=a^n$ CUANDO n ES 2

**Pierre de Fermat**, matemático francés, enunció su teorema así: "**En la fórmula $b^n+c^n=a^n$, si el exponente n es mayor que dos**, **los valores de a, b y c no pueden ser simultáneamente números enteros positivos**".

Según este enunciado en la fórmula $b^2+c^2=a^2$ (**1a**), los valores de **a**, **b** y **c** si pueden ser simultáneamente números enteros positivos. A continuación procedemos a demostrarlo. Pero antes advertimos al lector que estos procedimientos de solución de la **fórmula de Fermat**, cuando el valor de **n** es igual a dos, han sido demostrados, y están expuestos en la **Historia** de las **Matemáticas**.

Despejando el valor de la $b^2$ en (**1a**), tenemos que $b^2=a^2-c^2$ (**2a**). Designando que **a=c+r**, y sustituyendo, resulta: $b^2=(c+r)^2-c^2$ (**3a**); $b^2=2cr+r^2$ (**4a**). Despejando el valor de la **c**, tenemos que $c=(b^2-r^2)/2r$ (**5a**). Esta fórmula es una ecuación de primer grado, en que se puede considerar a la **c** como función de **b** y **r** como constante, o se puede considerar a la **c** como función de **b** y **r**.

En consecuencia, según la fórmula (**5a**), cualquier valor que se le asigne a **b** y **r** determina que la **c** sea un número entero positivo o racional. Y, aunque el valor de la **c** resulte ser una fracción o cociente, efectuando el procedimiento requerido, se elimina su carácter fraccionario. Por ejemplo, sea **r=1** y **b=20**, sustituyendo en **(5a**), **c=399/2**. Expresándolo en la fórmula (**1a**), tenemos que $20^2+(399/2)^2=(399/2+1)^2$. Eliminando el denominador de las fracciones, resulta que $40^2+399^2=401^2$.

Si los valores de **b** y **r** son fracciones racionales, sean **b=d/e** y **r=f/g**. Sustituyendo en (**5a**), obtenemos el siguiente resultado: $c=(d^2g^2-e^2f^2)/2e^2fg$. El mismo procedimiento se aplica al valor de la **a**, por lo que $a=(d^2g^2+e^2f^2)/2e^2fg$. Si los valores de **a** y **c** se substituyen en la ecuación (**1a**) el lector puede verificar la validez de los mismos.

En el argumento matemático anterior se demuestra que los valores de **a, b** y **c** pueden ser números enteros positivos y también fracciones racionales.

La fórmula (**3a**) se puede generalizar en esta ecuación, $b^2=[c+(m+p)r]^2-(c+mr)^2$ (**6a**). De allí que $c=[b^2-(2m+p)pr^2]/2pr$ (**7a**), los valores de **m**, **p** y **r** se pueden designar como constantes, y la **b** puede variar según el uso que se le asigne a la fórmula. Por lo que el valor de la **c** es función de **b**.

Las fórmulas (**5a**) y (**7a**) forman valores racionales necesarios y no probables de la **c** es decir, los valores de la **c** son exactos. También nos permiten establecer relaciones entre **c** y **a**.

Si en la fórmula (**1a**) designamos que **c=b+r,** resulta $b^2+(b+r)^2=a^2$ (**8a**). Despejando a la **b**, tenemos que $b=[-r\pm(2a^2-r^2)^{1/2}]/2$ (**9a**).

Por medio de la fórmula (**5a**) podemos obtener valores consecutivos de **c** y **a** como $\mathbf{139999^2+9799860000^2=9799860001^2}$. Con la fórmula (**9a**) podemos calcular valores consecutivos de **b** y **c**, aplicando un procedimiento aritmético de carácter técnico. Y, de este modo, calculamos la siguiente suma racional de dos potencias con exponente **2**, $\mathbf{5406093003^2+5406093004^2=7645370045^2}$.

## DEMOSTRACIÓN PARCIAL DEL TEOREMA DE FERMAT

Si en la fórmula $b^n+c^n=a^n$, el valor de la **a** es un múltiplo de **b** o **c**, los valores de **a**, **b** y **c** no pueden ser simultáneamente números enteros positivos si el valor del exponente **n** es igual o mayor que **2**.

Designemos que $h^n-1=S$, $S=h^e$, $h^e=A^n$ y que los valores de **h** y **n** sean números enteros positivos. De allí que el valor de la **S** sea, también un número entero positivo. Como la **S** es menor que $h^n$, entonces el valor de la **e** es menor que el de **n** en la igualdad $h^e=A^n$. Y en tanto **n** sea mayor que la **e**, luego la **h** es mayor que **A**. Por lo tanto, es imposible que el valor de la **A** sea igual o mayor que la **h**, según las definiciones anteriores. Dado que $h^n$ es mayor en una unidad que $A^n$, entonces ¿es posible que el valor de la **A** sea un número entero positivo? A continuación demostremos si esta hipótesis es cierta.

En la serie $N=h^n, h^n-1, h^n-2, h^n-3,\ldots, h^n-t$; el término más próximo a $h^n$ es $h^n-1$. Como el valor de la **h** es un número entero positivo cada término es menor en una unidad que el anterior.

Ahora formemos la siguiente serie: $M=h^n, (h-1)^n, (h-2)^n,\ldots, (h-t)^n$. En la serie **M**, el término más próximo a $h^n$ es $(h-1)^n$ si el valor de la **h** es un número entero positivo y mayor que **1**. Lo que indica que en las series **N** y **M** los términos más próximos a $h^n$ son $h^n-1$ y $(h-1)^n$.

Y si el valor de la **A** es un número entero positivo, podríamos suponer como verdadera la igualdad: $A^n=(h-1)^n$. Como hemos supuesto que $A^n=h^n-1$, entonces $h^n-1=(h-1)^n$.

Es válido establecer que $h=h-1+1$. Sustituyendo, tenemos que $[(h-1)+1]^n-1=(h-1)^n$. Desarrollando el primer miembro de esta ecuación resulta que

$$[(h-1)+1]^n-1=(h-1)^n+n(h-1)^{n-1}+[n(n-1)/2](h-1)^{n-2}+...+[n(n-1)/2](h-1)^2+n(h-1)+1-1=(h-1)^n.$$

Y efectuando las debidas operaciones, resulta que

$$n(h-1)^{n-1}+[n(n-1)/2](h-1)^{n-2}+...+[n(n-1)/2](h-1)^2+n(h-1)=0.$$

Si el valor de la **h** es igual a **1**, es evidente que la suma del primer miembro es igual a cero. Pero si el valor de la **h** es mayor que **1**, es evidente que el resultado del primer miembro de la ecuación resulta ser un número entero positivo, mayor que el otro, según la **ley del binomio de Newton**.

Como el segundo miembro de la ecuación es cero, entonces resultan falsas las suposiciones de las igualdades $\mathbf{h^n-1=(h-1)^n}$ y $\mathbf{A^n=(h-1)^n}$. Dado que $\mathbf{h^n-1}$ es menor que $\mathbf{h^n}$, luego el valor de $\mathbf{h^n-1}$ es mayor que $\mathbf{(h-1)^n}$. Por lo tanto, el valor de $\mathbf{A^n}$ está entre $\mathbf{h^n}$ y $\mathbf{(h-1)^n}$.

¿Es posible que el valor de **A** sea un cociente racional? Imposible, porque $\mathbf{h^n-1}$ es un número entero positivo si el valor de la **h** lo es. En consecuencia, si el valor de la **A** no es un cociente racional, entonces el valor de **A** es irracional. Luego, en la igualdad $\mathbf{A^n=h^n-1}$; $\mathbf{A=(h^n-1)^{1/n}}$, el valor de la **A** es irracional si su exponente es **n**.

Ahora bien, sea la igualdad $\mathbf{A^n=h^n-1}$. Multipliquemos ambos miembros de la igualdad por $\mathbf{c^n}$, de lo que resulta, $\mathbf{A^nc^n=c^n(h^n-1)}$; $\mathbf{A^nc^n=h^nc^n-c^n}$ .

Designemos que $\mathbf{h^nc^n=a^n}$ y $\mathbf{A^nc^n=b^n}$. Sustituyendo, resulta $\mathbf{b^n=a^n-c^n}$; $\mathbf{b^n+c^n=a^n}$. Si los valores de **a** y **c** son números enteros positivos, entonces es imposible que el valor de la **b** sea un número entero positivo, si el valor de la **h** es un número entero positivo igual o mayor que **2**.

En consecuencia, si $\mathbf{a^n}$ es $\mathbf{h^n}$ veces mayor que $\mathbf{c^n}$, en tanto los valores de **a**, **c** y **h** sean números enteros positivos, entonces el valor de la **b** es irracional, aunque el valor de **n** sea igual o mayor que **2**. Esta demostración, también es válida si el valor de la **c** es un cociente racional. Además, si tenemos que $\mathbf{h^nc^n=a^n}$ y $\mathbf{A^nc^n=b^n}$, entonces **a=hc** y **b=Ac**. De allí que la **a** es **h** veces mayor que la **c** de acuerdo al argumento anterior.

Si en la fórmula $\mathbf{b^n+c^n=a^n}$, el valor de la **b** es múltiplo de **c**, los valores de **a**, **b** y **c** no pueden ser simultáneamente números enteros positivos si el valor de **n** es igual o mayor que **2**.

De acuerdo al **enunciado del Teorema de Fermat**, designemos que **b=hc** y que el valor de la **h** sea un número entero positivo. Sustituyendo, tenemos que $\mathbf{(hc)^n+c^n=a^n}$. Y efectuando las operaciones correspondientes, tenemos que
$\mathbf{h^nc^n+c^n=a^n}$; $\mathbf{c^n(h^n+1)=a^n}$; $\mathbf{c(h^n+1)^{1/n}=a}$.

Examinemos si el valor del factor $\mathbf{(h^n+1)^{1/n}}$ sea un número entero positivo. Designemos que $\mathbf{h^n+1=h^e}$; $\mathbf{h^n+1=A^n}$ y que los valores de **h** y **n** sean números enteros positivos.

De lo anterior tenemos que $\mathbf{h^e=A^n}$. Como $\mathbf{h^e>h^n}$, entonces **e>n**. De allí que **A>h**. Y como $\mathbf{A^n}$ es mayor en una unidad que $\mathbf{h^n}$ formemos las siguientes series:

$\mathbf{N=h^n, h^n+1, h^n+2,..., h^n+t}$ ; y $\mathbf{M=h^n, (h+1)^n, (h+2)^n,\ldots,(h+t)^n}$.

En la serie **N**, el término más próximo a $\mathbf{h^n}$ es $\mathbf{h^n+1}$. Y en la serie **M**, el término más próximo a $\mathbf{h^n}$ es $\mathbf{(h+1)^n}$. Si el valor de la **h** es un número entero positivo, para que el valor de la **A** sea un número entero positivo, debemos suponer que $\mathbf{A^n=(h+1)^n}$. Como $\mathbf{A^n=h^n+1}$, entonces $\mathbf{h^n+1=(h+1)^n}$.

Hemos designado el valor de la **h** es un número entero positivo para que el valor de la **A** lo sea también. De allí que el valor de la **A** no puede ser una fracción, porque si $A^n=h^n+1$ y el valor de la **h** es un número entero positivo, entonces la suma $h^n+1$ es un número entero positivo. Por lo tanto el valor de la **A** no puede ser una fracción.

Supongamos que $h^n+1=(h+1)^n$. Desarrollando el segundo miembro de la igualdad, tenemos que $h^n+1=h^n+nh^{n-1}+n(n-1)h^{n-2}/2+\ldots+n(n-1)h^2/2+nh+1$. Por lo que $nh^{n-1}+n(n-1)h^{n-2}/2+\ldots+n(n-1)h^2/2+nh=0$. Como el valor de la **h** es un número entero positivo la igualdad anterior es falsa. Por consiguiente, se demuestra la falsedad de la suposición de las igualdades $h^n+1=(h+1)^n$ y $A^n=(h+1)^n$.

Como el valor de la **h** es un número entero positivo es imposible que el valor de $A^n$ sea un cociente. Por lo tanto, el valor de $(h^n+1)^{1/n}$ es irracional porque se demuestra que es imposible ubicarlo como un número entero positivo.

Dado que $a=c(h^n+1)^{1/n}$, si los valores de **c** y **h** son números enteros positivos, el valor de la **a** es irracional, por lo que se demuestra el teorema.

## DEMOSTRACIÓN DE LA FÓRMULA $b^a+c^a=a^a$

Si en la fórmula $b^n + c^n= a^n$ el valor del exponente **n** es igual o mayor que el valor de la **a**, los valores de **a**, **b** y **c** no pueden ser números enteros positivos si el valor del exponente es igual o mayor que **2**.

En la fórmula $b^n+ c^n=a^n$, designemos que **n=a** y **a=c+r**, por lo que $b^a+ c^a=a^a$, $b^a=a^a- c^a$; y $b^a=(c+r)^a-c^a$. Efectuando en esta diferencia de potencias, el procedimiento requerido en el segundo miembro de la ecuación, resulta que:

$$b^a=ac^{a-1}r+a(a-1)c^{a-2}r^2/2!+a(a-1)(a-2)c^{a-3}r^3/3!+\ldots+a(a-1)(a-2)c^3r^{a-3}/3!+a(a-1)c^2r^{a-2}/2!+acr^{a-1}+r^a \quad (\mathbf{10a}).$$

Designemos que **r=1** y que los valores de la **c** sean números enteros positivos de allí que **a=c+1**; **c=a-1**. Entonces la fórmula (**10a**) adopta siguiente forma:
$b^a=c^a+c^{a-1}+a(a-1)c^{a-2}/2!+a(a-1)(a-2)c^{a-3}/3!+\ldots+a(a-1)(a-2)c^3/3!+a(a-1)c^2/2!+ac+1$.

Por lo tanto el valor de la **a** es un número entero positivo. Como **c=a-1**, es evidente, según la fórmula anterior, que el valor de $b^a$ es mayor que $c^a$. Luego, el valor de $b^a$ está entre los valores de la $a^a$ y $(a-1)^a$, es decir, que éstos son sus límites, y según la fórmula (**10a**), $b^a$ no es cociente. Por consiguiente, si la **b** está entre **a** y **a-1**, su valor es irracional porque es imposible ubicarlo como número entero positivo o cociente racional.

Supongamos que en la fórmula (**10a**) el valor de la **r** aumente como número entero positivo, entonces el valor de $b^a$ debe aproximarse más al valor de $a^a$. Por lo que el valor de la **r** aumenta con respecto al valor la de **c**, y el valor de la **c** disminuye con respecto a los valores de **a** o **r**.

Designemos que en la fórmula $b^a=a^a-c^a$, **c=1**. Como **a=c+r**, luego **a=1+r**. Sustituyendo, tenemos que $b^a=a^a-1$. Y si **c=1** el valor de $b^a$ tiene la máxima aproximación hacia $a^a$. Por lo que es evidente que el límite mayor de $b^a$ resulta cuando **c=1**, y el límite menor cuando **r=1**. Pero en ambos límites el valor de $b^a$ está entre los valores de $a^a$ y $(a-1)^a$. Como el valor de $b^a$ no es un cociente, entonces el valor de la **b** es irracional.

En consecuencia, para cualesquier valores de **c** y **r**, el valor de $b^a$ está entre $a^n$ y $(a-1)^n$, por lo que el valor de la **b** es irracional. Por consiguiente, se demuestra que en la fórmula $b^a+c^a=a^a$, los valores de **a**, **b** y **c** no pueden ser simultáneamente números enteros positivos, si **n=a** y el valor de la **a** es igual o mayor que **2**.

Y si el valor de **n** es mayor que el de la **a** y el valor de la **a** es mayor en una unidad que el de la **c**, de acuerdo con la demostración anterior, entonces el valor de la **b** está entre **a** y **c**. Como **c=a-1** y $b^n$ no es un cociente, por lo tanto el valor de la **b** es irracional.

Según el argumento matemático anterior, si el valor de la **r** aumenta con respecto a **1**, el valor de la **b** se aproxima al valor de la **a**, por lo que el valor de la **b** es irracional.

En consecuencia si el exponente **n** es igual o mayor que el valor de la **a**, los valores de **a**, **b** y **c** no pueden ser simultáneamente números enteros positivos.

## DEMOSTRACIÓN DE LA FÓRMULA $b^c + c^c=a^c$

Si en la fórmula $b^n + c^n=a^n$ el valor del exponente **n** es igual o mayor que el valor de la **c**, los valores de **a**, **b** y **c** no pueden ser simultáneamente números enteros positivos si el valor de **n** es igual o mayor que dos.

En la fórmula $b^n + c^n=a^n$, designemos que **n=c**, y **a=c+r**; y que los valores de **a** y **c** sean números enteros positivos. Tenemos que $b^c=a^c - c^c$; $b^c=(c+r)^c- c^c$. Efectuando las requeridas operaciones en el segundo miembro de la ecuación, tenemos que

$$b^c=c^c r+c(c-1)c^{c-2}r^2/2!+c(c-1)(c-2)c^{c-3}r^2/3!+\ldots+c(c-1)(c-2)c^3r^{c-3}/3!+\ldots+c(c-1)c^2r^{c-2}/2!+$$
$$+cr^{c-1}+r^c.$$

Cuando la **r** es igual o mayor que **1**, es evidente que el valor de $b^c$ es mayor que $c^c$.

Si designamos que **r=1**, entonces **c=a-1**; $c^c=(a-1)^c$, y el valor de $b^c$ es mayor que $(a-1)^c$ y menor que $a^c$. Como $b^c$ no es un cociente racional, luego el valor de la **b** es irracional.

Designemos que en la igualdad **a=c+r**, el valor de la **r** aumenta como número entero positivo, entonces el valor de $b^c$ debe aproximarse al valor de $a^c$· Por lo que el valor de la **a** aumenta con respecto al de la **c**, o el valor de la **c** disminuye con respecto al valor de la **a** y al de la **r**.

Designemos que en la fórmula $\mathbf{b^c=a^c - c^c}$; **c=1**. Como **a=c+r**, luego **a=1+r**. Sustituyendo tenemos que $\mathbf{b^c=a^c-1}$. Cuando **c=1** el valor de $\mathbf{b^c}$ tiene la máxima aproximación al valor de $\mathbf{a^c}$. Es evidente que el límite mayor de $\mathbf{b^c}$ resulta cuando **c=1** y el límite menor cuando **r=1**. Es decir, que $\mathbf{b^c}$ tiene la máxima aproximación al valor de $\mathbf{(a-1)^c}$.

Por consiguiente, cualesquier que sean los valores de **c** y **r**, como números enteros positivos, en la fórmula $\mathbf{b^c=a^c – c^c}$, el valor de $\mathbf{b^c}$ está entre los valores de $\mathbf{a^c}$ y $\mathbf{(a-1)^c}$. Y, como el valor de $\mathbf{b^c}$ no es un cociente racional, entonces el valor de la **b** es irracional, porque no existe una potencia perfecta $\mathbf{b^c}$, que esté entre los valores de $\mathbf{a^c}$ y $\mathbf{c^c}$.

Por lo tanto, se demuestra que si $\mathbf{n \geq c}$, en la fórmula $\mathbf{b^n+c^n=a^n}$, los valores de **a**, **b** y **c** no pueden ser simultáneamente números enteros positivos si **n** es igual o mayor que **2**. Además, si el valor de **n** es mayor que la **c** y el valor de la **a** es mayor en una unidad con respecto a la **c**, de acuerdo a la demostración anterior, el valor de la **b** está entre **a** y **c**. Como **c=a-1** y el valor de $\mathbf{b^n}$ no es un cociente, entonces el valor de la **b** es irracional.

Según el argumento matemático anterior, si el valor de la **r** aumenta con respecto a **1**, el valor de la **b** se aproxima al valor de la **a**. Por lo tanto, el valor de la **b** es irracional. Y por consiguiente, cuando el exponente **n** es igual o mayor que la **c**, los valores de **a**, **b** y **c** no pueden ser simultáneamente números enteros positivos, si el valor de la **c** es igual o mayor que **2**.

**EL BINOMIO DE NEWTON**

Cualquier coeficiente del **binomio de Newton** se puede calcular por esta tabla de valores:

**[n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(…)x5x4x3x2x1]/[(…)x1x2x3x4x5(…)(n-5)(n-3)(n-3)(n-2)(n-1)n]**.

Si en el binomio $\mathbf{(c+r)^n}$, el valor del exponente **n** es par, el coeficiente máximo se obtiene por esta fórmula: $\mathbf{n!/[(n/2)!]^2}$. Por ejemplo: si **n=36**, entonces $\mathbf{36!/(18!)^2=9075135300}$.

Y cuando el exponente **n** es impar, hay dos coeficientes iguales de máximo valor, y se obtienen así: **n!/[(n+1)/2)!][(n-1)/2)!]**. Por ejemplo, cuando el valor del exponente **n** es **35**, tenemos que $\mathbf{C_m=35!/(18!)(17!)=4537567650}$. En que $\mathbf{C_m}$ es el coeficiente de máximo valor del producto del **binomio de Newton**.

De acuerdo al orden del producto del **binomio de Newton**, cada término está determinado exactamente. Por lo que podemos designar un número determinado para cada término, desde el primero hasta el final, así: $\mathbf{t=1, 2, 3,…,t_f}$, en que cada término tiene su valor exacto. De este modo, se puede calcular el coeficiente de cada término del producto del **binomio de Newton** para todo valor de **n**, sea par o impar, con esta fórmula: $\mathbf{C_t=n!/\{[n-(t-1)]!\}[(t-1)!]}$; $\mathbf{C_t=n!/[(n-t+1)!x(t-1)!]}$. En que $\mathbf{C_t}$ es el coeficiente del término según el orden del producto, **t** es el número del término en el orden del producto, y **n** es el exponente del **binomio de Newton**.

Cuando el exponente del **binomio de Newton** es par, el producto lo expresamos así:

$$(c+r)^n=c^n+\{n!/[(n-1)!(1!)]\}c^{n-1}r+\{n!/[(n-2)!](2!)\}c^{n-2}r^2+\{n!/[(n-3)!](3!)\}c^{n-3}r^3+$$
$$+\{n!/[(n-4)!](4!)\}c^{n-4}r^4+\ldots+\{n!/[(n/2)!]^2\}c^{n/2}r^{n/2}+\ldots+\{n!/[(n-2)!](2!)\}c^2r^{n-2}+$$
$$+[n!/(n-1)!]cr^{n-1}+r^n.$$

Si el exponente del **binomio de Newton** es impar, entonces el producto es:

$$(c+r)^n=c^n+[n!/(n-1)!]c^{n-1}r+\ldots+\{n!/[(n+1)/2]![(n-1)/2]!\}c^{(n+1)/2}r^{(n-1)/2}+$$
$$+\{n!/[(n+1)/2]![(n-1)/2]!\}c^{(n-1)/2}r^{(n+1)/2}+\ldots+[n!/(n-1)!]cr^{n-1}+r^n.$$

$C_{13}=35!/(23!)(12!)=834451800$. El coeficiente del término **15** del producto del binomio $(c+r)^{36}$ es: $C_{15}=36!/(22!)(14!)=3796297200$. Y el coeficiente del término **29**, es: $C_{29}=36!/(8!\text{x}28!)=30260340$. La suma de los números factoriales del denominador del cociente debe ser igual a **n**.

Ahora podemos formar una expresión exacta de la **serie del producto del binomio de Newton**. Si en el binomio $(c+r)^n$, el valor de **n** es un número par, entonces

$$(c+r)^n=c^n+(n/1!)c^{n-1}r+[n(n-1)/2!]c^{n-2}r^2+\ldots+[n!/((n/2)!)^2]cr^{n/2}+\ldots+[n(n-1)/2!]c^2r^{n-2}+$$
$$+(n/1!)cr^{n-1}+r^n.$$

Y si el valor del exponente **n** es impar, entonces tenemos que,

$$(c+r)^n=c^n+(n/1!)c^{n-1}r+[n(n-1)/2!]c^{n-2}r^2+\ldots+[n!/((n+1)/2)!((n-1)/2)!]c^{(n+1)/2}r^{(n-1)/2}+$$
$$+\ldots+[n!/((n-1)/2)!((n+1)/2)!]c^{(n-1)/2}r^{(n+1)/2}+\ldots+[n(n-1)/2!]c^2r^{n-2}+(n/1!)cr^{n-1}+r^n. \quad (\mathbf{11a})$$

## TRANSFORMACIÓN DEL PRODUCTO DEL BINOMIO DE NEWTON

Según la **ley del binomio de Newton**, cada término del producto del binomio tiene una fórmula que calcula su coeficiente. Expresamos la fórmula del primer término hasta el quinto con el fin de describirla. Con el símbolo $t_m$ indicamos el número del término según el orden del producto, en que **m=1, 2, 3, 4,…** Así tenemos

$$t_0=n^0/0!;\ t_1=n/1!;\ t_2=n(n-1)/2!;\ t_3=n(n-1)(n-2)/3!;\ t_4=n(n-1)(n-2)(n-3)/4!;$$
$$t_5=n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)/5!;\ldots \quad (\mathbf{12a})$$

El numerador del cociente tiene tantos factores en que interviene **n** como indica el número factorial del denominador. Cada factor comprende una diferencia del valor del exponente menos un número que comienza con cero (**0**). Los factores se definen de un modo sucesivo: **(n-0)(n-1)(n-2)(n-3)(…)(n-(n-1))**. Para cada término, el número factorial del denominador aumenta en una unidad con respecto al anterior.

Como **$a=c+r$**, entonces **$a^n=(c+r)^n$** (**13a**). De la fórmula (**13a**) se forma el siguiente conjunto de series según la **ley del binomio de Newton**:

$$a=c+r;\ a^2=c^2+2cr+r^2;\ a^3=c^3+3c^2r+3cr^2+r^3;$$
..........................................................................;

$$a^{16}=c^{16}+16c^{15}r+120c^{14}r^2+560c^{13}r^3+1820c^{12}r^4+4368c^{11}r^5+8008c^{10}r^6+114c^9r^7+12870c^8r^8+$$
$$+11440c^7r^9+8008c^6r^{10}+4368c^5r^{11}+1820c^4r^{12}+560c^3r^{13}+120c^2r^{14}+16cr^{15}+r^{16};$$

$$a^{17}=136c^{15}r^2+680c^{14}r^3+2380c^{13}r^4+6188c^{12}r^5+12376c^{11}r^6+19448c^{10}r^7+24310c^9r^8+$$
$$c^{17}+17c^{16}r++24310c^8r^9+19448c^7r^{10}+12376c^6r^{11}+6188c^5r^{12}+2380c^4r^{13}+680c^3r^{14}+$$
$$+136c^2r^{15}+17cr^{16}+r^{17}.\ (\mathbf{14a})$$

Si **$c+r=a$**, entonces se puede transformar la serie (**14a**) en las siguientes expresiones:
$$c^2+r^2=a^2-2cr;\ c^3+r^3=a^3-3acr;\ c^4+r^4=a^4-4a^2cr+2c^2r^2;$$
..................................................................,
$$c^{16}+r^{16}=a^{16}-16a^{14}cr+104a^{12}c^2r^2-352a^{10}c^3r^3+660a^8c^4r^4-672a^6c^5r^5+336a^4c^6r^6-64a^2c^7r^7+2c^8r^8;$$

$$c^{17}+r^{17}=a^{17}-17a^{15}cr+119a^{13}c^2r^2-442a^{11}c^3r^3+935a^9c^4r^4-1122a^7c^5r^5+714a^5c^6r^6-204a^3c^7r^7+$$
$$+17ac^8r^8.\ (\mathbf{15a})$$

En la serie (**15a**), una fórmula par depende de las pares anteriores. Y del mismo modo una fórmula impar depende de las impares precedentes. Por ejemplo en la fórmula (**14a**), transformemos las fórmulas **$a^{16}$** y **$a^{17}$**. Si factorizamos los términos equidistantes de la fórmula por el término **$a^{16}$**, tenemos que

$$a^{16}=c^{16}+16cr(c^{14}+r^{14})+120c^2r^2(c^{12}+r^{12})+560c^3r^3(c^{10}+r^{10})+1820c^4r^4(c^8+r^8)+4368c^5r^5(c^6+r^6)+$$
$$+8008c^6r^6(c^4+r^4)+11440c^7r^7(c^2+r^2)+12870c^8r^8+r^{16}.$$

Aplicando el mismo procedimiento con **$a^{17}$**, resulta que

$$a^{17}=c^{17}+17cr(c^{15}+r^{15})+136c^2r^2(c^{13}+r^{13})+680c^3r^3(c^{11}+r^{11})+2380c^4r^4(c^9+r^9)+6128c^5r^5(c^7+r^7)+$$
$$+12376c^6r^6(c^5+r^5)+19448c^7r^7(c^3+r^3)+24310c^8r^8(c+r)+r^{17}.$$

Es evidente, que para transformar el producto de **$a^{16}$** tendríamos que sustituir las sumas de las potencias correspondientes en la serie (**15a**). Lo mismo sucede para **$a^{17}$**, porque este es un procedimiento muy complicado y tedioso.

Ahora bien, efectuando las correspondientes sustituciones, la serie (**14a**), la transformamos en ésta:

$$a=c+r;\ a^2=c^2+2cr+r^2;\ a^3=c^3+3acr+r^3;$$

$a^{16}=c^{16}+16a^{14}cr-104a^{12}c^{2}r^{2}+352a^{10}c^{3}r^{3}-660a^{8}c^{4}r^{4}+672a^{6}c^{5}r^{5}-336a^{4}c^{6}r^{6}+64a^{2}c^{7}r^{7}+$
$+(-2)c^{8}r^{8}+r^{16}$;

$a^{17}=c^{17}+17a^{15}cr-119a^{13}c^{2}r^{2}+442a^{11}c^{3}r^{3}-935a^{9}c^{4}r^{4}+1122a^{7}c^{5}r^{5}-714a^{5}c^{6}r^{6}+204a^{3}c^{7}r^{7}+$
$+(-17)ac^{8}r^{8}+r^{17}$ (**16a**).

En la serie (**15a**) los términos, según sea su orden, se calculan con estas fórmulas: $t_1=a^n$; $t_2=na^{n-2}cr$; $t_3=(n(n-3)/2!)a^{n-4}c^{2}r^{2}$; $t_4=(n(n-4)(n-5)/3!)a^{n-6}c^{3}r^{3}$; $t_5=(n(n-5)(n-6)(n-7)/4!)a^{n-8}c^{4}r^{4}$,...

Si los términos fueran **17**, **65** y **269**, tenemos que

$t_{17}=(n(n-17)(n-18)(\ldots)(n-30)(n-31)/16!)a^{n-32}c^{16}r^{16}$,

$t_{65}=(n(n-65)(n-66)(\ldots)(n-126)(n-127)/64!)a^{n-128}c^{64}r^{64}$,

$t_{269}=(n(n-269)(n-270)(\ldots)(n-534)(n-535)/268!)a^{n-536}c^{268}r^{268};\cdots$ (**17a**).

El cálculo del coeficiente de los términos a partir de $t_{17}$, es complicado. Obviamos esta dificultad con la fórmula: $C_t=[n/(p-1)!]\{[(n-p)!]/[n-2(p-1)]!\}a^{n-2(p-1)}c^{p-1}r^{p-1}$ (**18a**). Simplificando los paréntesis, resulta $C_t=[n/(p-1)!][(n-p)!/(n-2p+2)!]a^{n-2(p-1)}c^{p-1}r^{p-1}$.

En esta fórmula, $C_t$ es el término, **p** es el número del término en la serie y **n** es el exponente de la suma de las dos potencias. Así tenemos que:

$C_1=(n/((1-1)!)((n-1)!/(n-2(1-1))!))a^{n}$; $C_1=(n/0!)((n-1)!/n!)a^{n}$, $t_1=a^{n}$.

$C_2=(n/(2-1)!((n-2)!/(n-2(2-1))!)a^{n-2}cr$; $C_2=(n/1!)((n-2)!/(n-2)!)a^{n-2}cr$ ; $t_2=na^{n-2}cr$ ;

$C_3=(n/2!)((n-3)!/(n-4)!)a^{n-4}c^{2}r^{2}$; $C_4=(n/3!)((n-4)!/(n-6)!)a^{n-6}c^{3}r^{3}$.

Si los términos fueran **17**, **65** y **269**, tenemos lo siguiente:

$C_{17}=(n/16!)[(n-17)!/(n-32)!]a^{n-32}c^{16}r^{16}$; $C_{65}=(n/64!)[(n-65)!/(n-128)!]a^{n-128}c^{64}r^{64}$;

$C_{269}=(n/268!)[(n-269)!/(n-536)!]a^{n-536}c^{268}r^{268}$ . (**19a**)

La fórmula (**18a**) nos permite calcular cualquier término de la serie (**15a**) y simplificar en su mínima expresión los términos de la serie (**17a**). Por ejemplo los términos $t_{17}$, $t_{65}$ y $t_{269}$ tienen **16**, **64** y **268** factores respectivamente.

Si en el **binomio de Newton** el valor de **n** es impar, se pueden calcular los términos de derecha a izquierda de los productos transformados de la serie (**15a**). Así tenemos que

$$t_1=na\,c^{(n-1)/2}r^{(n-1)/2};\quad t_2=(n(n^2-1)/2^2x3!)a^3c^{(n-3)/2}r^{(n-3)/2}$$

$$t_3=(n(n^2-1)(n^2-3^2)/2^4x5!)a^5c^{(n-5)/2}r^{(n-5)/2};$$

$$t_4=(n(n^2-1)(n^2-3^2)(n^2-5^2)/2^6x7!)a^7c^{(n-7)/2}r^{(n-7)/2}.$$

Designando que los términos sean, **17**, **65** y **269**, tenemos que

$$t_{17}=(n(n^2-1)(n^2-3^2)(\ldots)(n^2-29^2)(n^2-31^2)/2^{32}x33!)a^{33}c^{(n-33)/2}r^{(n-33)/2};$$

$$t_{65}=(n(n^2-1)(n^2-3^2)(\ldots)(n^2-125^2)(n^2-127^2)/2^{128}x129!)a^{129}c^{(n-129)/2}r^{(n-129)/2};$$

$$t_{269}=(n(n^2-1)(n^2-3^2)(\ldots)(n^2-533^2)(n^2-535^2)/2^{536}x537!)a^{537}c^{(n-537)/2}r^{(n-537)/2}.\ (\mathbf{20a})$$

Si en el **binomio de Newton** el valor de **n** es par, se pueden calcular los términos de derecha a izquierda de los productos transformados en la serie (**15a**). Así tenemos que

$$t_1=2c^{n/2}r^{n/2};t_2=(n^2/2x2!)a^2c^{(n-2)/2}r^{(n-2)/2};\quad t_3=(n^2(n^2-2^2)/2^3x4!)a^4c^{(n-4)/2}r^{(n-4)/2};$$

$$t_4=(n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)/2^5x6!)a^6c^{(n-6)/2}r^{(n-6)/2}.$$

Asignando que los términos sean, **17**, **65** y **269**, tenemos que

$$T_{17}=(n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)(\ldots)(n^2-28^2)(n^2-30^2)/2^{31}x32!)a^{32}c^{(n-32)/2}r^{(n-32)/2};$$

$$T_{65}=(n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)(\ldots)(n^2-124^2)(n^2-126^2)/2^{127}x128!)a^{128}c^{(n-128)/2}r^{(n-128)/2};$$

$$T_{269}=(n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)(\ldots)(n^2-532^2)(n^2-534^2)/2^{535}x536!)a^{536}c^{(n-536)/2}r^{(n-536)/2}\ (\mathbf{21a}).$$

Cuando el valor de **n** es impar, las fórmulas de los términos de la serie (**20a**) podemos expresarlas así:

$$t_m=(n(n^2-1)(n^2-3^2)(n^2-5^2)(\ldots)(n^2-(2m-3)^2/2^{2m-2}(2m-1)!)a^{2m-1}c^{(n-(2m-1))/2}r^{(n-(2m-1))/2}.\ (\mathbf{22a})$$

El número de términos de la serie (**15a**), cuando el valor de **n** es impar, se calcula por esta fórmula **(n-1)/2+1**, y el de los factores de los numeradores por las fórmulas de la serie (**20a**).

Si el valor de **n** es par, las fórmulas de los términos de la serie (**21a**) las expresamos así:

$$t_m=(n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)(\ldots)(n^2-(2(m-2))^2)/2^{2m-3}(2(m-1))!)a^{2(m-1)}c^{(n-2(m-1))/2}r^{(n-2(m-1))/2}\ (\mathbf{23a}).$$

El número de términos de la serie (**15a**), cuando **n** es par, es **n/2+1** y el número de factores de los numeradores de las fórmulas de la serie (**21a**) es **m-1**. Por ejemplo en el primer término el número de factores es cero. El número factorial es **0!**, y la potencia $\mathbf{2^{2m-3}}$ es $\mathbf{2^{-1}}$ en el denominador. Por lo que el coeficiente del término es **2**. De acuerdo a las fórmulas (**11a**), cuando el exponente **n** en el binomio $\mathbf{(c+r)^n}$ es impar establecemos esta relación:

$$(c+r)^n=c^n+r^n+ncr(c^{n-2}+r^{n-2})+[n(n-1)/2!]c^2r^2(c^{n-4}+r^{n-4})+[n(n-1)(n-2)/3!]c^3r^3(c^{n-6}+r^{n-6})+\ldots+ +n!/\{[(n-1)/2]![(n+1)/2]!\}c^{(n-1)/2}r^{(n-1)/2}(c+r)\ .\ (24a)$$

Y cuando el valor de **n** es par:

$$(c+r)^n=c^n+r^n+ncr(c^{n-2}+r^{n-2})+[n(n-1)/2!]c^2r^2(n^{n-4}+r^{n-4})+[n(n-1)(n-2)/3!]c^3r^3(c^{n-6}+r^{n-6})+ +\ldots+n!/[(n/2)!^2]c^{n/2}r^{n/2}.\ (25a)$$

A continuación explicaremos lo que significa la conversión de los términos del **producto del binomio de Newton** en la serie que hemos definido. Hemos designado que **a=c+r**, por lo tanto, $\mathbf{a^n=(c+r)^n}$. En las fórmulas (**11a**) determinamos los términos del **producto del binomio de Newton** considerando los valores de **c** y **r**. Pero las fórmulas (**15a**), (**24a**) y (**25a**) indican que pueden relacionarse los valores de **a**, **c** y **r**. Si se logran esas relaciones, entonces transformamos el **producto del binomio de Newton**. Las fórmulas (**17a**) expresan los términos de la transformación general del **producto del binomio de Newton**. Como $\mathbf{a^n=(c+r)^n}$, entonces construimos la fórmula según esa igualdad:

$$a^n=c^n+na^{n-2}cr+(n(n-3)/2!)a^{n-4}c^2r^2+(n(n-4)(n-5)/3!)a^{n-6}c^3r^3-(n(n-5)(n-6)(n-7)/4!)a^{n-8}c^4r^4+ +\ldots+r^n\ (26a).$$

De acuerdo a **ley del binomio de Newton**, cuando el exponente **n** es par en $\mathbf{(c+r)^n}$, sólo se determina un término central porque los exponentes de **c** y **r** se igualan. Y cuando el valor de **n** es impar la ley determina dos términos centrales de igual coeficiente y en que los exponentes de **c** y **r** son menores en una unidad en ambos términos.

**En consecuencia, según la dirección del procedimiento que hemos aplicado, no podemos resolver el Teorema de Fermat con una sola demostración. De allí que se requieran varias demostraciones que implique y dependa una demostración general como mostraremos más adelante**.

De acuerdo con la **ley del binomio de Newton**, en la fórmula (**11a**) cuando el valor de **n** es un número primo, **n** es múltiplo de todos los coeficientes, comenzando desde el segundo hasta el penúltimo. Si $\mathbf{n=m^p}$ en que **m** es un número primo, dichos coeficientes son divisibles exactamente por **m**. Pero, cuando el valor de **n** está formado por factores diferentes que sean números enteros positivos, dichos coeficientes no son divisibles exactamente por **n** ni por ninguno de los factores que componen a **n**. Algunos coeficientes son divisibles por **n**, y otros por algunos de los factores de **n**. Entonces, sólo los coeficientes iguales y mayores que **n** son divisibles por **n** cuando éste es primo o sus factores primos son iguales. Esta ley también se aplica a las formulas, (**17a**), (**20a**) y (**21a**).

A continuación, expresamos los términos del **producto transformado del binomio de Newton** cuando el valor de **n** es impar. Si $(c+r)^n=a^n$, tenemos que

$$a^n=c^n+na^{n-2}cr-[n(n-3)/2!]a^{n-4}c^2r^2+[n(n-4)(n-5)/3!]a^{n-6}c^3r^3-[n(n-5)(n-6)(n-7)/4!]a^{n-8}c^4r^4+$$
$$+\ldots+[n(n^2-1)/2^2x3!]a^3c^{(n-3)/2}r^{(n-3)/2}+r^n \quad (\mathbf{27a}).$$

Puede ser que la configuración de los signos de los últimos términos de la fórmula (**27a**) se mantenga o cambie, según sea el valor de **n**, porque el número de los términos del **producto del binomio de Newton** cambian. Si para un valor **n** el número de dichos términos es par, para el siguiente valor de **n** consecutivo en dos unidades es impar. Esta propiedad está demostra en la serie (**15a**). En la fórmula (**27a**) el número de términos es par por lo que el signo del penúltimo término es negativo. Si el número de términos fuera impar entonces dicho término sería positivo.

Cuando el valor de **n** es par en el binomio $(c+r)^n$, los términos del **producto transformado del binomio de Newton** lo expresamos así:

$$a^n=c^n+a^{n-2}cr-[n(n-3)/2!]a^{n-4}c^2r^2+[n(n-4)(n-5)/3!]a^{n-6}c^3r^3-[n(n-5)(n-6)(n-7)/4!]a^{n-8}c^4r^4+$$
$$+\ldots+[n^2(n^2-2^2)/2^3x4!]a^4c^{(n-4)/2}r^{(n-4)/2}-(n^2/2x2!)a^2c^{(n-2)/2}r^{(n-2)/2}+2c^{n/2}r^{n/2}+r^n. \quad (\mathbf{28a})$$

En la fórmula (**28a**) si el valor de **n** es par y está formado por factores diferentes, todos los términos no son exactamente divisibles por **2**. Para ello el exponente debe ser $n=2^p$ para que todos los términos sean divisibles por dos.

## DEMOSTRACIÓN PARCIAL DEL TEOREMA DE FERMAT POR EL PROCEDIMIENTO DE EQUIVALENCIA

Dos fórmulas son equivalentes si tienen la misma simetría y estructura. Si dos fórmulas son equivalentes entre sí tienen las mismas propiedades. Las fórmulas $b^n+c^n=a^n$ y $d^n+r^n=b^n$ son equivalentes entre sí porque tienen la misma simetría o estructura, por lo tanto tienen las mismas propiedades. Antes de demostrar el **Teorema de Fermat**, resolveremos la fórmula $b^3+c^3=a^3$.

Si $b^3+c^3=a^3$, entonces $b^3=a^3-c^3$. Y si los valores de **a**, **c** y la potencia $b^3$ son números enteros positivos, entonces $a>c$, $a>b$, $a-c=r$ y $a=c+r$. Es evidente, que el valor de **r** es un número entero positivo. Sustituyendo y desarrollando, tenemos que $b^3=3cr(c+r)+r^3$. Como $c+r=a$, entonces $b^3=3acr+r^3$. Estableciendo la diferencia de cubos, tenemos que $b^3-r^3=3acr$, y designando que $3acr=d^3$, entonces $b^3-r^3=d^3$ ó $d^3=b^3-r^3$.

En esta última fórmula los valores de **b** y **r** pueden adoptar cualesquier números enteros positivos. De allí **enunciamos la siguiente proposición**: Si el valor de la **d** es un número entero positivo en la fórmula $d^3=b^3-r^3$ en que los valores de **b** y **r** sean números enteros positivos, entonces en la fórmula $b^3=a^3-c^3$ es posible que el valor de la **b** sea un número entero positivo si los valores de **a** y **c** lo son. Si el valor de la **d** no puede ser un número entero positivo del mismo modo el valor de la **b** no puede serlo, si los valores de **a** y **c** son números enteros positivos. Cuando el valor de la **a** es función de los valores de **c** y **r** no se les pueden asignar valores arbitrarios a la **a**, si se le asignan valores determinados a **c** y **r**.

Dado que $d^3=3acr$, para que el valor de la **d** sea un número entero positivo o racional designemos que $a=3^2c^2r^2k^3$. Esta suposición es correcta según la fórmula $b^3-r^3=d^3$. Sustituyendo en $d^3=3acr$, tenemos que $d^3=(3cr)(3^2c^2r^2k^3)$; $d^3=3^3c^3r^3k^3$; $d=3crk$.

¿Es el valor de la **k** un número entero positivo o un cociente? Como $a=3^2c^2r^2k^3$, sustituyendo en $b^3=a^3-c^3$, entonces $b^3=(3^2c^2r^2k^3)^3-c^3$, $b^3=3^6c^6r^6k^9-c^3$, $b^3=c^3(3^6c^3r^6k^9-1)$. Designemos que $h^3=3^6c^3r^6k^9$, luego $h=3^2cr^2k^3$, $b^3=c^3(h^3-1)$ y $b=c(h^3-1)^{1/3}$.

Hemos demostrado que si el valor de la **h** es un número entero positivo la expresión $(h^3-1)^{1/3}$ es un número irracional. Por consiguiente, para que el valor de la **b** sea un número entero positivo el valor de la **k** debe ser una fracción racional. Pero veamos si ese valor de la **k** es posible.

Tenemos que $a=3^2c^2r^2k^3$. Como $a=c+r$, de allí que $c+r=3^2c^2r^2k^3$; $k^3=(c+r)/3^2c^2r^2$. Sólo el valor de la **k** es una fracción, si la desigualdad $3^2c^2r^2>|c+r|$ es válida. Demostremos si esta desigualdad es cierta.

Dividamos los miembros de la desigualdad por **cr** entonces tenemos que $3^2cr>|1/r+1/c|$. Es evidente que si los valores de **r** y **c** son iguales o mayores que **1** la desigualdad es cierta. Por consiguiente, si los valores de **c** y **r** son números enteros positivos el valor de $k^3$ es una fracción.

¿Es el valor de la **k** un cociente racional, o irracional? En la fórmula $k^3=a/3^2c^2r^2$ designemos que $a=a'^3$, $c=c'^3$ y $r=r'^3$, por lo que $k^3=a'^3/3^2c'^6r'^6$; $k=a'/(3^2)^{1/3}c'^2r'^2$. Es evidente que el valor de la **k** es irracional, si los valores de **a'**, **c'** y **r'** son números enteros positivos.

Si en la fórmula $a'^3=c'^3+r'^3$ los valores de **c'** y **r'** son números enteros positivos y el valor de la **a'** es irracional, es posible que el valor de la **k** sea una fracción racional. Pero, el valor de **a'** no puede ser cualquier número irracional. Para que el valor de la **k** sea un cociente racional en esa igualdad, designemos que $a=3^2a''^3$. Como $a=c+r$, $c=c'^3$ y $r=r'^3$, entonces $3^2a''^3=c'^3+r'^3$. De allí que $a''^3=(c'^3+r'^3)/3^2$. Para que el valor de **a''** sea un número entero positivo la suma $a'^3+r'^3$ debe factorizarse por $3^2$. Es decir que $c'^3=3^2c''^3$ y $r'^3=3^2r''^3$. Por lo que $c'=(3^2)^{1/3}c''$ y $r'=(3^2)^{1/3}r''$. Cuando el valor de **a''** es un número entero positivo entonces los valores de **c'** y **r'** no pueden ser simultáneamente números enteros positivos.

Si los valores **a''**, **c'** y **r'** son números enteros positivos, el valor de la **k** no podría ser un cociente racional. Y cuando los valores de **a''**, **c''** y **r''** no son simultáneamente números enteros positivos el valor de la **k** tampoco podría ser un cociente racional. Demostremoslo si es así. Tenemos $a=c+r$; $3^2a''^3=c'^3+r'^3$; $a''^3=(c'^3+r'^3)/3^2$ y $k^3=a/3^2c^2r^2$;
$k^3=3^2a''^3/3^2(c'^3)^2(r'^3)^2$; $k=a''/c'^2r'^2$.

Si los valores de **a”**, **c’** y **r’** son números enteros positivos el valor de la **k** es un cociente racional. Pero en la fórmula $\mathbf{a''^3=(c'^3+r'^3)/3^2}$, los valores $\mathbf{c'^3}$ y $\mathbf{r'^3}$ deben contener el número $\mathbf{3^2}$. Y cuando los valores $\mathbf{c'^3}$ y $\mathbf{r'^3}$ no contienen el número $\mathbf{3^2}$ el valor de **a”** es irracional. Como $\mathbf{c'^3=3^2c''^3}$ y $\mathbf{r'^3=3^2r''^3}$, sustituyendo en **a=c+r**, tenemos que

$\mathbf{3^2a''^3=3^2c''^3+3^2r''^3}$, $\mathbf{a''^3=c''^3+r''^3}$. Y en la **k** tenemos que $\mathbf{k^3=a''^3/3^8c''^6r''^6}$; $\mathbf{k=a''/(3^8)^{1/3}c''^2r''^2}$.

Cuando los valores de **a”**, **c”** y **r”** son números enteros positivos el valor de la **k** es irracional. Y si cualesquier de esos valores fuera irracional, en la forma en que se han especificado el valor de la **k** también sería irracional.

Por lo tanto para que el valor de **a”** sea un número entero positivo, los valores de **c’** y **r’** no podrían ser simultáneamente números enteros positivos si los valores de **c”** y **r”** son números enteros positivos.

Luego, si los valores de **a’**, **c’**, **r’**, **a”**, **c”** y **r”** no pueden ser simultáneamente números enteros positivos entonces el valor de la **k** es irracional. Por lo tanto el valor de la **d** es irracional.

Si designamos que **a-c=r**, en que la diferencia **a-c** es función de **r**, entonces al valor de la **r** se le puede asignar valores independientes en la fórmula $\mathbf{d^3=b^3-r^3}$, y lo mismo a los valores de la **b**. De acuerdo a esta demostración, la fórmula $\mathbf{d^3=b^3-r^3}$ tiene la misma simetría o equivalencia que la fórmula $\mathbf{b^3=a^3-c^3}$.

En la primera formula, los valores de **b** y **r** son números enteros positivos y el valor de la **d** es irracional. Y en la segunda fórmula los valores de **a** y **c** son números enteros positivos e independientes del valor de **b**. Por lo que el valor de la **b** es irracional, en la segunda fórmula.

Para presentarlo de modo evidente, designemos que **a=b**, **c=r** y **b=d**. Téngase entendido que los valores de las dos fórmulas son iguales, y sólo que en la primera fórmula el valor de la **b** es un número entero positivo y en la segunda el valor de la **b** es irracional. Lo significativo en esta relación de equivalencia no son los valores, sino las estructuras y simetrías de las ecuaciones.

Por lo que se demuestra que en la fórmula $\mathbf{b^3+c^3=a^3}$, los valores de **a**, **b** y **c** no pueden ser simultáneamente números enteros positivos.

Examinemos si el valor de la **k** en la fórmula $\mathbf{b^2+c^2=a^2}$, puede tener un valor racional. Designamos que **a=c+r,** luego $\mathbf{b^2=2cr+r^2}$ y $\mathbf{c=(b^2-r^2)/2r}$. Es evidente que el valor de la **c** es un número racional sean cuales fueran los números racionales de los valores de **b** y **r**. Como la **c** es función de **b** y **r** entonces los valores de **b** y **r** son independientes del valor de la **c**.

Ahora bien, tenemos que $\mathbf{2cr=b^2-r^2}$. En la expresión **2cr**, sólo existen dos variables y no tres como en $\mathbf{3acr=b^3-r^3}$.

Designemos que $\mathbf{c=2rk^2}$, por lo que $\mathbf{2r(2rk^2)=b^2- r^2}$; $\mathbf{2^2r^2k^2=b^2- r^2}$. Despejando el valor de **k**, tenemos que $\mathbf{k=(b^2- r^2)^{1/2}/2r}$. La diferencia $\mathbf{b^2-r^2}$ tiene la misma simetría que $\mathbf{a^2-c^2}$. De allí, designamos que **b=b'+r** y $\mathbf{b^2- r^2=d^2}$. De este modo la **b** se convierte en una función de **b'** y **r** lo que permite obtener valores exactos para la **r**, utilizando el procedimiento anterior.

Dado que $\mathbf{d^2=2b'r+b'^2}$, $\mathbf{r=(d^2- b'^2)/2b'}$. Sustituyendo en **k**, tenemos que

$$\mathbf{k=((b'+(d^2- b'^2)/2b')^2-((d^2- b'^2)/2b')^2)^{1/2}/2((d^2- b'^2)/2b')};$$
$$\mathbf{k=(b'^2+d^2- b'^2)^{1/2}/(d^2- b'^2)/b'};$$
$$\mathbf{k=b'd/(d^2- b'^2)}.$$

Con este argumento demostramos que en las igualdades $\mathbf{b^2=a^2- c^2}$; $\mathbf{d^2=b^2- r^2}$ y $\mathbf{d^2=2cr}$, los valores de **a**, **b**, **c**, **d** y **r** pueden ser números enteros positivos simultáneamente en las dos fórmulas, y el valor de la **k** puede ser una fracción racional. Y si el valor de la **k** es un número entero positivo el valor de la **b** sería irracional.

El valor de la **k** puede ser irracional si la expresión $\mathbf{(b^2- r^2)^{1/2}}$ es irracional, porque los valores de **b** y de **r** son independientes en $\mathbf{c=(b^2- r^2)/2r}$. Pero, este no es el significado de la **k** en la demostración anterior en que **d=3crk**.

Como en la fórmula $\mathbf{c=(b^2-r^2)/2r}$, el valor de la **c** se expresa en una ecuación de primer grado, lo lógico sería haber designado que **c=2rk**. En tal caso $\mathbf{k=(b^2-r^2)/4r^2}$, y el valor de la **k** sería racional. Si el valor de la **k** fuera una fracción racional entonces los valores **b** y **r** son números enteros positivos o racionales.

La propiedad del valor de la **k** en la fórmula $\mathbf{b^2+c^2=a^2}$ es distinta que en la fórmula $\mathbf{b^3+c^3=a^3}$, ya que en la primera $\mathbf{c=(b^2-r^2)/2r}$. Y lo conveniente sería designar que **c=2rk**. Y el valor de la **k** se expresaría como un término de primer grado por lo que la **k** podría tener cualquier valor racional. Entonces procedamos analizar la forma general del valor de la **k** en la fórmula $\mathbf{b^2+c^2=a^2}$.

En la fórmula $\mathbf{b^2-r^2=2cr}$ el producto **2cr** puede ser un cuadrado perfecto. Como $\mathbf{b^2-r^2=d^2}$, entonces $\mathbf{d^2=2cr}$ **y** $\mathbf{d=(2cr)^{1/2}}$. Es evidente que si le asignamos ciertos valores a **c** y **r** el valor de la **d** puede ser racional o un número entero positivo.

Ahora bien, en la fórmula $\mathbf{b^3- r^3=3acr}$ hemos designado que $\mathbf{k^3=a/3^2c^2r^2}$, luego en $\mathbf{b^2-r^2=2cr}$; $\mathbf{k^2=1/(2cr)}$. Por lo que $\mathbf{k=1/(2cr)^{1/2}}$. Si designamos que $\mathbf{b^2-r^2=d^2}$, de allí que $\mathbf{d^2=2cr}$. Como el segundo miembro de esta ecuación es **2cr**, entonces **2cr=2crx1**. En que $\mathbf{1=2crk^2}$. Y según los valores que se le asignen a **c** y **r** es evidente que el valor de la **k** puede ser un cociente racional.

La posibilidad de que el valor de la **k** sea un cociente racional se debe a que el numerador del cociente de **k** es **1** y que los valores de **c** y **r** sean potencias de primer grado. También porque a los valores de **c** y **r** se le pueden asignar cualesquier números enteros positivos, de tal modo que el producto **2cr** sea un cuadrado perfecto.

Por lo tanto, es posible que en el cociente $\mathbf{k=(1/2cr)^{1/2}}$ el valor de la **k** pueda ser un cociente racional. En consecuencia, en la fórmula $\mathbf{b^2-r^2=2cr(2crk^2)}$, la expresión $\mathbf{2cr(2crk^2)}$ puede ser un cuadrado perfecto. Porque si **2cr** es un cuadrado perfecto entonces $\mathbf{k^2}$ es un cuadrado perfecto. Es decir que los valores de **2cr** y $\mathbf{k^2}$ son racionales si uno de los dos es racional.

## SEGUNDA PARTE

## DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE FERMAT CUANDO EN LA FÓRMULA $b^n+c^n=a^n$ EL VALOR DEL EXPONENTE n ES UN NÚMERO IMPAR

**Enunciado del teorema: Si en la fórmula $b^n+c^n=a^n$, el valor del exponente n es un número impar mayor que 3, los valores de a, b, y c no pueden ser simultáneamente números enteros positivos.**

En la fórmula $\mathbf{b^n+c^n=a^n}$ (**1b**), despejando $\mathbf{b^n}$, tenemos que $\mathbf{b^n=a^n-c^n}$ (**2b**). Por la fórmula (**1b**) es evidente que $\mathbf{a^n>b^n}$ y $\mathbf{a^n>c^n}$. Por lo que **a>b** y **a>c**. Designemos que los valores de **a** y **c** sean números enteros positivos de allí que en la diferencia **a-c=r** el valor de la **r** es un número entero positivo. Entonces **a=c+r** (**3b**). Sustituyendo (**3b**) en (**2b**), tenemos que $\mathbf{b^n=(c+r)^n-c^n}$ (**4b**). De acuerdo a las fórmulas (**17a**) y (**19a**), se puede establecer la siguiente relación:

$$b^n-r^n=acr[na^{n-3}-(n(n-3)/2!)a^{n-5}cr+(n(n-4)(n-5)/3!)a^{n-7}c^2r^2-(n(n-5)(n-6)(n-7)/4!)a^{n-9}c^3r^3+$$
$$+\ldots+(n(n^2-1)(n^2-3^2)(n^2-5^2)/2^6x7!)a^6c^{(n-9)/2}r^{(n-9)/2}-(n(n^2-1)(n^2-3^2)]/2^4x5!)a^4c^{(n-7)/2}r^{(n-7)/2}+$$
$$+(n(n^2-1)/2^2x3!)a^2c^{(n-5)/2}r^{(n-5)/2}-nc^{(n-3)/2}r^{(n-3)/2}].\ (5b)$$

Designemos $\mathbf{Q=na^{n-3}-(n(n-3)/2!)a^{n-5}cr+\ldots+(n(n^2-1)/2^2x3!)a^2c^{(n-5)/2}r^{(n-5)/2}-nc^{(n-3)/2}r^{(n-3)/2}}$ (**6b**), y $\mathbf{b^n-r^n=d^n}$ (**7b**). Luego, $\mathbf{d^n=acrQ}$ (**8b**).

Examinemos si el valor de la **d**, puede ser un número entero positivo. Designemos que el valor de la **Q** sea: $\mathbf{Q=a^{n-1}c^{n-1}r^{n-1}k^n}$ (**9b**). De allí que $\mathbf{b^n-r^n=acrQ}$ (**10b**). Por lo que $\mathbf{d^n=a^nc^nr^nk^n}$ (**11b**) y **d=acrk** (**12b**).

**<u>Hipótesis 1</u>: El valor de la k es una fracción.**
**Demostración**:

Como los valores de **c** y **r** son números enteros positivos, **a > b**, **a > c** y de acuerdo a la fórmula (**11b**), tenemos que $\mathbf{b^n=a^nc^nr^nk^n+r^n}$ (**13b**); $\mathbf{b^n=r^n(a^nc^nk^n+1)}$ (**14b**).

Por la fórmula (**13b**) es evidente que $\mathbf{b^n>a^nc^nr^nk^n}$ (**15b**). Si el valor de la **k** es un número igual o mayor que **1** entonces no es posible que **a>b**. Pero la desigualdad **a>b** es consecuencia de las definiciones establecidas. Por lo tanto para que la desigualdad (**15b**) sea válida, el valor de la **k** debe ser un número menor que **1**. Por lo que el valor de la **k** es una fracción (cociente), y la **hipótesis 1** queda demostrada.

<u>**Hipótesis 2**</u>: **El valor de la k es una fracción irracional**.

**Demostración**:

Hemos designado que los valores de **a**, **c** y **r**, sean números enteros positivos en las fórmulas (**3b**) y (**5b**). Por lo que el valor de $k^n$ es un cociente racional (suposición) en la fórmula $k^n=Q/a^{n-1}c^{n-1}r^{n-1}$ (**16b**).

Supongamos que entre los posibles valores de **a**, **c** y **r**, el valor de la **Q** sea una **(n-1)** potencia cuya base sea un número entero positivo que designamos $Q=q^{n-1}$. Luego $k^n=q^{n-1}/a^{n-1}c^{n-1}r^{n-1}$ y $(k^n)^{1/(n-1)}=q/acr$. De allí designamos que $k^n=k'^{n-1}$. Por lo que, según la suposición, $k'=q/acr$ y **k'** es una fracción racional. Por lo tanto, $q^n=a^nc^nr^nk'^{n-1}$ y $q=acr(k'^{n-1})^{1/n}$.

Sin embargo es evidente que el valor de $(k'^{n-1})^{1/n}$ es irracional. Y como $k=(k'^{n-1})^{1/n}$, el valor de la **k** es irracional porque el cociente **(n-1)/n** no puede ser un número entero, dado que es imposible que **n** sea un múltiplo exacto de **n-1**.

Supongamos que el valor de la **Q** sea una **n** potencia cuya base es un número entero positivo y que designamos así: $Q=q'^n$. Entonces, $k^n=q'^n/a^{n-1}c^{n-1}r^{n-1}$ y $k=q'/(a^{n-1}c^{n-1}r^{n-1})^{1/n}$. Es evidente que el denominador del cociente **k** es irracional. Entonces el valor de la **k** es un número irracional.

Para que el valor de la **k** sea racional, se debe suponer que el valor de la **Q** contiene los factores $a^{n-1}$, $c^{n-1}$ y $r^{n-1}$ simultáneamente.

Para que esta suposición sea válida, designemos que **k=1**. Luego $Q=a^{n-1}c^{n-1}r^{n-1}$; $d^n=a^nc^nr^n$ y **d=acr**. Como $b^n-r^n=d^n$; $b^n>d^n$; **b>d** y **a>b**; por lo que **a>d**. Por lo tanto, **acr>d**, $a^nc^nr^n>d^n$; $a^nc^nr^n>acrQ$ y $a^{n-1}c^{n-1}r^{n-1}>Q$. Y si **r=1** y **c=1**, de todos modos $a^{n-1}>Q$, porque **a>d** y $a^n>d^n$.

Por consiguiente se demuestra que el valor de la **Q** no puede contener simultáneamente los factores $a^{n-1}$, $c^{n-1}$ y $r^{n-1}$. De este modo se prueba la **hipótesis 2**.

**Explicación de la Hipótesis 2**.

Hemos supuesto que según sean los valores de **a** y **c** es posible que el valor de la **Q** sea una **(n-1)** potencia perfecta en que $Q=q^{n-1}$.

Por las fórmulas (**10b**) y (**16b**), tenemos que **$ac=(b^n-r^n)/Qr$** y **$ac=Q^{1/n}/rk^{n/(n-1)}$**. Combinando las ecuaciones, resulta que **$d^n=(Q/k)^{n/(n-1)}$**. Si se radicaliza por **n**, tenemos que **$d=(Q/k)^{1/(n-1)}$**, de allí que **$d=q/k^{1/(n-1)}$**.

Como **$k=(Q/(acr)^{n-1})^{1/n}$** y **$Q=q^{n-1}$**, tenemos que **$k=(q/acr)^{(n-1)/n}$**. Sustituyendo y efectuando las operaciones requeridas, resulta que **$d=q^{(n-1)/n}(acr)^{1/n}$**; **$d=(q^{n-1}acr)^{1/n}$**. En el cociente **$k=(q/acr)^{(n-1)/n}$**, si los valores de **a**, **c**, **r** y **q** son números enteros positivos, entonces el valor de la **k** es irracional.

Designemos que **$Q=q^n$**, por lo que **$d=q^{n/(n-1)}k^{1/(n-1)}$**. Como **$k^n=q^n/(acr)^{n-1}$** y **$k=q/(acr)^{(n-1)/n}$**, el valor de la **k** es irracional si los valores de **a**, **c** y **r** son números enteros positivos. Supongamos que los valores de **a**, **c**, **r** y **Q**, sean potencias perfectas con exponentes **n**. Pero, como demostraremos más adelante, esa suposición conduciría al absurdo.

<u>Hipótesis 3</u>: **En la igualdad $d^n=acrQ$ no es posible un producto de los factores a, c, r y Q que origine una potencia $d^n$ y en que d sea un número entero positivo**.

**Demostración**:

Para que ese valor sea posible designemos **$c=c'^p$**, **$r=r'^p$** y supongamos que **$a=a'^p$**, **$Q=a'^qc'^qr'^q$**, **$p+q=n$;** y que los valores **a'**, **c'**, **r'**, **p** y **q** sean números enteros positivos.

Efectuando las requeridas sustituciones, tenemos este resultado: **$d^n=(a'^pc'^pr'^p)(a'^qc'^qr'^q)$**, **$d^n=a'^{p+q}c'^{p+q}r'^{p+q}$**; **$d^n=a'^nc'^nr'^n$** y **$d=a'c'r'$**.

¿Cómo saber si los valores de **a'**, **c'**, **r'** y **d**, sean números enteros positivos o algunos de ellos números irracionales?

Tenemos que **$d^n=a^nc^nr^nk^n$** y **$d^n=a'^nc'^nr'^n$**. Dado que estas fórmulas son iguales, entonces **$a^nc^nr^nk^n=a'^nc'^nr'^n$**, y **$k^n=a'^nc'^nr'^n/a^nc^nr^n$**. Radicalizando por **n** resulta que **$k=a'c'r'/acr$**. Como **$acr=a'^pc'^pr'^p$**, sustituyendo y efectuando las operaciones pertinentes, tenemos que **$k=1/a'^{p-1}c'^{p-1}r'^{p-1}$**.

Hemos designado que los valores de **a**, **c**, **r**, **c'** y **r'**, sean números enteros positivos y que **$Q=a^{n-1}c^{n-1}r^{n-1}k^n$** y demostrado que el valor de la **k** es irracional. Por lo tanto, la **a'** debe ser irracional en el nuevo valor de la **k** si los valores de **c'** y **r'** son números enteros positivos.

Es posible que en la fórmula **$d^n=acrQ$** el valor de la **Q** contenga el valor de **$r^{n-1}$**. El valor de la **r** puede ser igual a **1** si el valor de la **a** es mayor en una unidad que el de la **c**. Pero es imposible que el valor de la **Q** contenga los valores de **$a^{n-1}c^{n-1}r^{n-1}$** según lo hemos demostrado. Y si los valores de **a**, **c**, y **r** no son números primos entonces podemos suponer que **$a=a''^p$**, **$c=c''^p$** y **$r=r''^p$**, siempre y cuando sus valores sean potencias y sus bases números enteros positivos. Pero si alguno de esos valores es un número primo dicho valor no puede ser una potencia cuya base sea un número entero positivo.

Por definición, sabemos que un número primo no puede expresarse como una potencia cuya base sea un número entero positivo. Si los valores de **a**, **c** y **r** son o no números primos, entonces tenemos que $\mathbf{Q=a^{n-1}c'^{q}r^{n-1}}$, $\mathbf{Q=a'^{q}\,c^{n-1}r^{n-1}}$, $\mathbf{Q=a'^{q}c'^{q}r^{n-1}}$, $\mathbf{Q=a^{n-1}c^{n-1}r'^{q}}$ y $\mathbf{Q=a'^{q}c'^{q}r'^{q}}$. Los cinco valores asignados a la **Q** son falsos porque no pueden contener simultáneamente los valores de $\mathbf{a^{n-1}}$, $\mathbf{c^{n-1}}$ y $\mathbf{r^{n-1}}$ según se ha demostrado anteriormente. Su expresión debe ser:

$\mathbf{Q=a^{n-1}c'^{q}r^{n-1}k^{n}}$; $\mathbf{Q=a'^{q}c^{n-1}r^{n-1}k^{n}}$; $\mathbf{Q=a'^{q}c'^{q}r^{n-1}k^{n}}$, $\mathbf{Q=a^{n-1}c^{n-1}r'^{q}k^{n}}$ y $\mathbf{Q=a'^{q}c'^{q}r'^{q}k^{n}}$.

Si el valor de la **a** es un número primo se demuestra que $\mathbf{Q=a^{n-1}c'^{q}r'^{q}k^{n}}$. Y si los valores de **c** y **r** son números primos, entonces $\mathbf{Q=a'^{q}\,c^{n-1}r^{n-1}k^{n}}$.

<u>Hipótesis 4</u>: **Si en la fórmula $\mathbf{Q=a'^{q}c^{n-1}r^{n-1}k^{n}}$, los valores de c y r son números primos el valor de la k es una fracción (cociente) irracional**.

**Demostración**:

Tenemos que $\mathbf{b^n+c^n=a^n}$; $\mathbf{b^n=a^n-c^n}$; $\mathbf{a=c+r}$; $\mathbf{b^n=(c+r)^n-c^n}$; $\mathbf{b^n-r^n=a^n-c^n-r^n}$; $\mathbf{b^n-r^n=d^n}$;
$\mathbf{d^n=nc^{n-1}r+(n(n-1)/2)c^{n-2}r^2+\ldots+(n(n-1)/2)r^2c^{n-2}+ncr^{n-1}}$;
$\mathbf{d^n=cr(nc^{n-2}+(n(n-1)/2)c^{n-3}r+\ldots+(n(n-1)/2cr^{n-3}+nr^{n-2})}$;
$\mathbf{Q=nc^{n-2}+(n(n-1)/2)c^{n-3}r+\ldots+(n(n-1)/2)cr^{n-3}+nr^{n-2}}$; $\mathbf{d^n=crQ}$ y $\mathbf{n>2}$.

Efectuando las debidas operaciones, resulta que $\mathbf{Q=(a^n-c^n-r^n)/cr}$. Como los valores de **c** y **r** son números primos, entonces $\mathbf{Q=c^{n-1}r^{n-1}k^{n}}$, luego $\mathbf{k^n=(a^n-c^n-r^n)/c^nr^n}$; $\mathbf{k^nc^nr^n=a^n-c^n-r^n}$ y $\mathbf{a^n-c^n-r^n=k^nc^nr^n}$.

Supongamos que $\mathbf{k^n=1}$, luego $\mathbf{a^n-c^n-r^n=c^nr^n}$; $\mathbf{a^n=c^nr^n+c^n+r^n}$; $\mathbf{a^n=c^n(r^n+1+r^n/c^n)}$. Radicalizando por **n**, tenemos que $\mathbf{a=c(r^n+1+r^n/c^n)^{1/n}}$. Como **a=c+r**, resulta que $\mathbf{c+r=c(r^n+1+r^n/c^n)^{1/n}}$; $\mathbf{c=c(r^n+1+r^n/c^n)^{1/n}-r}$ y $\mathbf{1=(r^n+1+r^n/c^n)^{1/n}-r/c}$.

Designemos que $\mathbf{(r^n+1+r^n/c^n)^{1/n}=r+i}$, en que el valor de **i** sea un número decimal. De allí que **1=r+i-r/c**. Si **r>1**, **c>1**, **c=r**, **c>r** y **r>c**, es evidente que esta igualdad es falsa y que **|r+i-r/c|>1**. Por lo tanto $\mathbf{c^nr^n>|a^n-c^n-r^n|}$; $\mathbf{c^nr^n>crQ}$ y $\mathbf{c^{n-1}r^{n-1}>Q}$, si **r >1**.

También demostramos la desigualdad $\mathbf{c^nr^n>|a^n-c^n-r^n|}$, si **r>1**. Supongamos que $\mathbf{c^nr^n=a^n-c^n-r^n}$. Si **c>1** y **r>1**, dividamos la igualdad por $\mathbf{c^nr^n}$, por lo que
$\mathbf{1=a^n/c^nr^n-1/r^n-1/c^n}$.

Para que esta igualdad sea válida, debemos suponer que $\mathbf{a^n>c^nr^n}$, entonces **a>cr**. Dividamos la desigualdad por **cr**, por lo que (**a/cr)>1**. Como **a=c+r**, tenemos que [**(c+r)/cr]>1**; **|1/r+1/c|>1**. Si **r >1** y **c >2** es evidente que la desigualdad es falsa y que **1>|1/r+1/c|**, además hemos demostrado que el valor de la **c** debe ser mayor que **n**. Luego **cr>|c+r|**, **cr>a** y $c^n r^n > a^n$, cuando **r>1**.

Esta desigualdad es mucho mayor si $c^n r^n > |a^n - c^n - r^n|$. Dividamos esta desigualdad por $c^n r^n$ por lo que $1 > |a^n/c^n r^n - 1/r^n - 1/c^n|$. Si **c=2** y **r=2** la desigualdad es cierta, porque $a^n/c^n r^n = 1$. Por lo que tendríamos que **1>|1-1/r-1/c|**. Si **cr≥a**; **r>1** y **c>2**; entonces $1 > |a^n/c^n r^n - 1/r^n - 1/c^n|$. Por lo tanto, $c^n r^n > |a^n - c^n - r^n|$; $c^n r^n > crQ$ y $c^{n-1} r^{n-1} > Q$. Antes hemos demostrado que si una de la base de las potencias, como número entero positivo, es igual o menor que el exponente n, el valor de la **a** no podría ser un número entero positivo o racional.

Si los valores de **c** y **r** son números primos, designamos que $a'^q c^{n-1} r^{n-1} > Q$. Por lo que la igualdad $Q = a'^q c^{n-1} r^{n-1} k^n$ es válida si el valor de $k^n$ es una fracción (cociente). Por consiguiente la desigualdad $a'^q c^{n-1} r^{n-1} > Q$ es mucho mayor que la anterior si **a'>1**.

Dado que los valores de **c** y **r** son números primos éstos no pueden reducirse a potencias cuyas bases sean números enteros positivos.

Como $Q = a'^q c^{n-1} r^{n-1} k^n$, tenemos $k^n = Q/a'^q c^{n-1} r^{n-1}$ y $k = (Q/a'^q c^{n-1} r^{n-1})^{1/n}$. Dado que $a'^q c^{n-1} r^{n-1} > Q$, el valor de la **Q** no puede contener el producto $a'^q c^{n-1} r^{n-1}$. Y aunque el valor de la **Q** sea una **n** potencia cuya base sea un número entero positivo, entonces es evidente que el denominador del cociente es irracional. Por lo que el valor de la **k**, es irracional.

Si el valor de la **c** es igual a **2** el valor de la **b** sería irracional. Porque si **n≥c** el valor de la **b** es irracional según se ha demostrado anteriormente. De este modo, se demuestra la **hipótesis 4**.

<u>**Hipótesis 5**</u>: **Cuando en la fórmula $Q = a^{n-1} c'^q r'^q k^n$ el valor de n es un número impar y el valor de la a es un número primo, el valor de la k es una fracción irracional.**
**Demostración**:

De acuerdo a las fórmulas (**1b**), (**2b**), (**3b**), (**4b**), (**5b**), (**6b**), (**7b**) y (**8b**), designamos que $Q = a^{n-1} c'^q r'^q k^n$ si el valor de la **a** es un número primo y los valores de **c** y **r** son potencias cuyas bases sean números enteros positivos.

Supongamos que $k^n = 1$, luego $Q = a^{n-1} c'^q r'^q$. Como $d^n = a^n c'^n r'^n k^n$, entonces $d^n = a^n c'^n r'^n$. Es evidente que **a>b**, **a>c**, **b>d**, **a>d**, $a^n > d^n$ y $a^n c'^n r'^n > d^n$. La última desigualdad es mucho mayor que las otras. Como $d^n = acrQ$, luego $a^n c'^n r'^n > acrQ$. Dado que $c = c'^p$, $r = r'^p$, $Q = a^{n-1} c'^q r'^q$ y **p+q=n**, entonces $a^{n-1} c'^q r'^q > Q$. De este modo, se demuestra que el valor de la **Q** no puede contener el producto $a^{n-1} c'^q r'^q$, porque su valor es muy menor que éste.

Para que la igualdad $Q = a^{n-1} c'^q r'^q k^n$, sea válida, el valor de $k^n$ debe ser un cociente menor que **1**. Lo que es evidente.

Como $k^n=Q/a^{n-1}c'^q r'^n$, designemos que $Q=q^n$. De allí que $k=q/(a^{n-1}c'^q r'^q)^{1/n}$. Es evidente que el denominador $(a^{n-1}c'^q r'^q)^{1/n}$ es irracional. Por lo tanto el valor de la **k** es irracional. Por lo tanto el valor de la **k** es una fracción irracional. Y de este modo la **hipótesis 5** queda demostrada.

<u>Hipótesis 6</u>: **Si en las fórmulas $d^n=acrQ$, $d^n=a'^n c'^n r'^n$, $p+q=n$ y designamos que $a=a'^p$, $c=c'^p$, $r=r'^p$, $Q=a'^q c'^q r'^q$; y que los valores de a, c, r, c', r ', n, p y q son números enteros positivos, el valor de a' es irracional.**

**Demostración**:

En la fórmula $b^n=a^n- c^n$ podemos asignarle a los valores de **a** y **c** potencias de igual exponent, y cuyas bases sean números enteros positivos. Pero, como $a=c+r$, no podemos hacer lo mismo con la **r** si el exponente es mayor que dos. En la expresión **acr** designamos que $c=c'^p$ y $r=r'^p$ en que los valores de **c'** y **r'** sean números enteros positivos. Además, suponemos que $a=a'^p$, si el valor la **p** es mayor que dos. Y, que $acr=d^p$ y $Q=d^q$, tal como se ha designado de modo hipotético. Por lo que $d^{p+q}=acrQ$ y $d^n=acrQ$. De allí que $d^p=acr$, $d^q= Q$ y $d^n=d^p d^q$.

Lo extraño de esta suposición es que si conoce $d^p$, también se conoce $d^q$ y, por lo tanto, debe existir un valor en que $Q=d^q$.

Además, en los valores supuestos para la **Q** se presenta la **fórmula de Fermat**. Si en la potencia $d^n$ el valor de la **d** es un número entero positivo también debe cumplirse para el valor de la **Q**. Y si $q>p$, podemos designar que $q=p+m$, en que el valor de la **m** sea un número entero positivo, según las designaciones anteriores. Demostremoslo.

Sea $Q=d^q$ y $d^q=a'^q c'^q r'^q$, luego $d^{p+m}=a'^{p+m}c'^{p+m}r'^{p+m}$, y $d^p d^m=a'^p c'^p r'^p a'^m c'^m r'^m$. Entonces $a'^p=c'^p+r'^p$, tal como se ha supuesto, porque $a=c+r$, $a=a'^p$, $c=c'^p$ y $r=r'^p$.

**Cuando el valor de la r es igual a 1**.

Si $d^p=acr$ el valor de $d^p$ es independiente de $d^q$ en la fórmula $d^p=a'^p c'^p r'^p$. Designemos que $r=1$, entonces $d^p=a'^p c'^p$. Como $a=c+r$, luego $a=c+1$. De allí que $d^p=(c'^p+1)c'^p$. Radicalizando por **p**, $d=c'(c'^p+1)^{1/p}$.

Hemos demostrado que el valor de la expresión $(c'^p+1)^{1/p}$ es irracional si el valor de **c'** es un número entero positivo. Por lo que se demuestra que el valor de la **d** es irracional si **r**=**1**. En este caso, el valor de **a'** es irracional si el valor de **c'** es un número entero positivo y **r=1**. Veámoslo:

Como $a=c+r$, $c=c'^p$, $r=r'^p$ y $a=a'^p$, tenemos que $a'^p=c'^p+ r'^p$. Si **r=1**, porlo que $a'=(c'^p+1)^{1/p}$. De este modo demostramos que el valor de **a'** es irracional si **r=1**.

**Cuando el valor de la r es mayor que 1.**

Ahora bien, designemos que **$r>1$** y que el valor de la **r** es un número entero positivo. Hemos supuesto que **$d^q=d^pd^m$** y que **$d^q=a'^pc'^pr'^pa'^mc'^mr'^m$**. De allí que **$d^q=acra'^mc'^mr'^m$**. Como no existe la posibilidad de que el valor de la **Q** se pueda factorizar por **acr** y que **$d^m$** sea un número entero positivo, si la **Q** se factoriza por **acr**. Luego, el valor de **$d^m$** debe ser un cociente, lo que es evidente por la fórmula (**6b**). Por lo que es falsa la suposición de que **$Q=d^pd^m$**, si los valores de **d** y **m** son números enteros positivos.

Hemos designado que **$Q=d^q$**, **$q>p$**, **$q=p+m$** y **$d^q=a'^qc'^qr'^q$**. Como el valor de la **Q** no se puede factorizar en la forma establecida, entonces en la potencia **$d^q$**, si el valor de la **d** es un número entero positivo, el valor de la **q** debe ser un cociente en la expresión **$d^q=Q$**. Y es evidente que el valor de la **Q** se determina como un número entero positivo, si los valores de **a** y **c** se designan como números enteros positivos. Dado que **$Q=d^q$** y **$d=Q^{1/q}$**, como el valor de la **q** es un cociente, entonces el valor de la **d** es irracional. También el valor de la **$d^n$** se puede resolver por **$d^p$** si **n** es impar.

Como **$d^p=acr$** y **$a=c+r$** designemos que **$c=c'^p$** y **$r=r'^p$**. Supongamos que **$a=a'^p$**, **$a'^p=c'^p+r'^p$** y que es posible que el valor de **a'** sea un número entero positivo si los valores de **c'** y **r'** lo son.

En la fórmula **$a^n=b^n + c^n$** sea el valor de la **n** un número impar, entonces **$a>c$** y los valores de **a** y **c**, números enteros positivos. Como **$a=c+r$** y **$r=a-c$**, es evidente que el valor de la **r** es un número entero positivo.

Como las fórmulas **$a^n=c^n+b^n$** y **$a=c+r$** se redujeron a la fórmula **$d^n=acrQ$**, en que **$acr=d^p$** y **$Q=d^q$**, se designó que **$c=c'^p$** y **$r=r'^p$** y se supuso que **$a=a'^p$**, si el exponente es **$p>2$**.

El valor de la **d** sólo puede ser un número entero positive, si **a'** lo es. De allí que se retorna a la fórmula de **Fermat** si el valor de la **p** es impar en la fórmula **$a'^p=c'^p+r'^p$**.

Si en la fórmula **$a^n=c^n+b^n$**, se designó que los valores de **a** y **c**, son números enteros positivos, en la fórmula **$a'^p=c'^p +r'^p$** se supone que el valor de **a'** es un número entero positivo y se designa que los valores de **c'** y **r'** son números enteros positivos.

Para resolver la fórmula **$a'^p=c'^p+r'^p$** nos atenemos a esas condiciones. Como **$a'>c'$**, designemos que **$a' - c'=r'_2$**, entonces **$a'=c' + r'_2$** y **$d^p{}_2=a'c'r'_2Q'$**. De acuerdo al argumento anterior designemos que **$c'=c'^p{}_2$**, **$r'_2=r'^p{}_3$**, **$a'=a'^p{}_2$** y **$Q'=a'^q{}_2\ c'^q{}_2\ r'^q{}_3$**. Por lo tanto, **$d'^p{}_2=a'^p{}_2\ c'^p{}_2\ r'^p{}_3$** y **$d_2 = a'_2\, c'_2\, r'_3$**.

Para que el valor de **$d_2$** sea un número entero positivo el valor de **$a'_2$** debe ser un número entero positivo. De allí que sólo el valor de **$d_2$** es un número entero positivo si el valor de **$a'_2$** es un número entero positivo.

Por lo que debemos demostrar que el valor de **$a'_2$** sea un número antero positivo. Y para probarlo, apliquemos el mismo procedimiento matemático.

Tenemos: $a'_2=c'_2+r'_3$; $a'_2=a'^p_3$; $c'_2=c'^p_3$, $r'_3=r'^p_4$; $Q'_2=a'^q_3\ c'^q_3\ r'^q_4$; $d^p_3=a'_2c'_2r'_3Q'_2$ y $a'^p_3=c^p_3+r'^p_4$. Y, sólo el valor de $d_3$ es un número entero positivo si el valor de $a'_3$ es un número entero positivo.

El lector puede reconocer que en la fórmula $a^n=c^n + b^n$, en sus constantes reducciones, los valores de **a** y **c** se convierten en potencias continuas. Y si extendemos este procedimiento de un modo sucesivo según sea la serie establecida, tenemos que **a** y **c** se definen como potencias ilimitadas, cuyas bases son números enteros positivos. Los valores de **a** y **c** los expresamos así: $c\to lím\infty$ y $a\to lím\infty$; $a=i\to lím\infty\ A^i$ y $c=i\to lím\infty C^i$, en que **A** y **C** son números enteros positivos. Luego la fórmula $a^n=c^n+b^n$ la expresamos del siguiente modo: $(i\to lím\infty A^i)^n=(i\to lím\infty C^i)^n+b^n$.

De acuerdo a la fórmula $b^n + c^n = a^n$ y su reducción en $b^n - r^n = a^n - c^n - r^n$; $d^n = b^n - r^n$, $d^n=acrQ$, expresamos la hipótesis de que si $acr = a'^pc'^pr'^p$ y $Q =a'^qc'^qr'^q$, ésta conduce a la reducción continua de los valores de **a** y **c** en potencias cuyas bases sean números enteros positivos y sus exponentes infinitos. Por lo que esta hipótesis conduce al absurdo.

Siendo $a=A^i$ y $c=C^i$, este absurdo prueba que si el valor de **i** tiende al infinito, por reducciones continuas, no es válido suponer que $d^n=(a'^pc'^pr'^p)(a'^qc'^qr'^q)$, en que $acr=a'^pc'^pr'^p$ y $Q=a'^q\ c'^q\ r'^q$.

Supongamos que en la fórmula $d^n=d^pd^q$ el valor de la **p** es **2**. De todos modos, el valor de la **d** es irracional, aunque esta suposición sea falsa.

Aquí se presenta el absurdo de la hipótesis de que $d^n=d^pd^q$. Si el valor de la **p** es **2** en la fórmula $d^p=a'^pc'^pr'^p$, como $a=c+r$, los valores de **a'**, **c'**, y **r'** pueden ser simultáneamente números enteros positivos y, por consiguiente, el valor de la **d**.

Pero en la fórmula $Q=a'^qc'^qr'^q$ como el valor de la **q** es un cociente y $d=Q^{1/n}$ el valor de la **d** **e**s irracional. Entonces la hipótesis $d^n=d^pd^q$ conduce a dos valores contradictorios, uno racional y otro irracional, por lo tanto, la hipótesis es absurda.

<u>**Hipótesis 7**</u>: **Si en la fórmula $d^n=acrQ$, designamos que $acr=a'^pc'^ir'^f$, $Q=a'^qc'^er'^g$, $a=a'^p$, $c=c'^i$, $r=r'^f$, $p+q=n$, $i+e=n$ y $f+g=n$, el valor de la d es irracional.**

**Primera demostración**:

Como $a=c+r$, entonces $a'^p=c'^i+r'^f$. Supongamos que $Q>acr$, $a'^p>a'^q$ y que el valor de la **Q** contenga tantos valores de **c** y **r** y que los valores de **p**, **e**, **i**, **f**, **g** y **q** sean números enteros positivos.

Si $Q >acr$ y $a'^p>a'^q$ el valor de la **Q** no contiene de modo simultáneo los valores del producto **acr**. Esto es evidente, por la composición y simetría de los términos de la serie **Q**.

Dado que $\mathbf{a'^{p} > a'^{q}}$, para que sea cierta la desigualdad **Q>acr**, entonces debemos designar que $\mathbf{c'^{e}r'^{g} > c'^{i}r'^{f}}$. Y si el valor de **n** se incrementa, es evidente que $\mathbf{c'^{e}r'^{g} \gg c'^{i}r'^{f}}$. Si estas desigualdades son ciertas entonces **e>i** y **e>>i**, **g>f** y **g>>f**.

Como se ha supuesto de que los valores de **e**, **i**, **g** y **f** son números enteros positivos, designamos que **e =i +i'** y **g=f + f'**. Por lo tanto **i'** y **f'** son números enteros positivos. Por consiguiente $\mathbf{c'^{e} = c'^{i}c'^{i'}}$ y $\mathbf{r'^{g} = r'^{f}r'^{f'}}$.

Como designamos que **a=c+r**, si **r=1**, el valor de la **c** tiene su máxima aproximación al valor de la **a**, dado que **c=a-1**, Y si **c=1**, entonces **r=a-1**, por lo tanto, este es el máximo límite de aproximación de la **r** con relación al valor de la **a**.

Y si los valores de **c** y **r** son mayores que **1**, podemos designar que $\mathbf{c'^{i'} = s}$ y $\mathbf{r'^{f'} = t}$. Por lo tanto los valores de **s** y **t** son números enteros positivos mayores que **1**. Tenemos que **a=c+r**, $\mathbf{b^n + c^n = a^n}$, $\mathbf{b^n = a^n - c^n}$, $\mathbf{b^n = (c+r)^n - c^n}$, $\mathbf{b^n - r^n = (c+r)^n - c^n - r^n}$. Desarrollando en la última igualdad el término $\mathbf{(c+r)^n}$, según la **ley del binomio de Newton** y efectuando las requeridas operaciones, resulta que

$$\mathbf{b^n - r^n = cr(nc^{n-2} + (n(n-1)/2!)c^{n-3}r + \ldots + (n(n-1)/2!)cr^{n-3} + nr^{n-2})}.$$

Designemos que el valor de **Q'** es el factor que contiene la serie. De allí que $\mathbf{b^n - r^n = crQ'}$. Entonces ¿puede el valor de **Q'** contener de modo simultáneo los valores **c** y **r**? Sí podría pero ello depende de la suma de los términos de la serie **Q'** y no de la composición y de la simetría de los términos de la serie.

Para que esa condición se cumpla, en primer lugar, los valores de **c** y **r** deben ser pares, porque la suma de la serie **Q'** siempre es par. En segundo lugar, el número de términos de **Q'** debe ser igual $\mathbf{c^h r^h}$, aunque **h=1** y **r=1**.

Analicemos el argument de esa condición. El número de términos de la serie del binomio de Newton, es **n+1**. Si el exponente del binomio **n** es par el número de términos es impar. Y si **n** es impar el número de términos es par.

Como en la diferencia $\mathbf{b^n - r^n}$ se pierden dos términos entonces el número de términos de la serie **Q'** es **n-1**. Por consiguiente el valor de **cr** es **cr=n-1** y $\mathbf{c^h r^h = (n-1)^h}$. Y si **r=1**, luego **c=n-1** y $\mathbf{c^h = (n-1)^h}$.

Hemos demostrado que si el valor de la **c** es igual o menor que **n**, los valores de **a**, **b** y **c** en la fórmula $\mathbf{b^n + c^n = a^n}$ no pueden ser simultáneamente números enteros positivos. Por lo que se demuestra que cuando la suma de los términos de la serie **Q'** es **cr**, los valores de **a**, **b** y **c** en la fórmula $\mathbf{b^n = a^n - c^n}$ no pueden ser simultáneamente números enteros positivos.

Se puede advertir que por la composición y simetría de los términos de **Q'**, ésta no puede contener el producto **cr**. Por lo tanto, el valor de la **Q** no puede contener el producto $\mathbf{a'^{q}c'^{e}r'^{g}}$, ni que los valores de **a'**, **c'**, **r'**, **e**, **g** y **q** sean simultáneamente números enteros positivos.

**Segunda demostración.**

Según la **hipótesis 7**, designemos que **acr>Q**. Por lo que $a'^{p}c'^{i}r'^{f}>a'^{q}c'^{e}r'^{g}$; $b^{n}-r^{n}=a'^{p+q}c'^{e+i}r'^{f+g}$; $d^{n}=a'^{n}c'^{n}r'^{n}$ y **d=a'c'r'**. Aunque sea posible la expresión $a'^{q}c'^{e}r'^{g}$, los valores de **a'**, **c'**, **r**, **e**, **g** y **q** no pueden ser simultáneamente números enteros positivos según se ha demostrado anteriormente. Por lo tanto el valor de la **d** es irracional.

---

Por consiguiente, en las igualdades **p+q=n**, **i+e=n** y **f+g=n** uno de los valores de **n** es un cociente. Lo que es contradictorio, ya que los valores de **n** deben ser números enteros positivos.

En consecuencia la hipótesis que designamos como $d^{n}=a'^{p+q}c'^{i+e}r'^{f+g}$, $acr=a'^{p}c'^{i}r'^{f}$ y $Q=a'^{q}c'^{e}r'^{g}$ conduce al absurdo, si se designa que los valores de **a', c', d, r', p, q, i, e, f** y **g** son números enteros positivos simultáneamente.

Por lo tanto, se demuestra la **hipótesis 7**. Lo importante de esta hipótesis es que implica todas las combinaciones posibles que se puedan hacer de **acr** y **Q**.

<u>**Hipótesis 8**</u>: **Si en la fórmula $acrQ=d^{n}$, el valor de n es impar en $acr=a'^{p}c'^{p}r'^{p}$ y $Q=a^{q}c'^{q}r'^{q}$, y el valor de la p debe ser impar; y el de la q, par**.

**Demostración**:

Como en la fórmula $acrQ=d^{n}$ el valor del exponente **n** es impar, y la suma de los exponentes de los factores **acr** es impar, entonces en la fórmula $acr=a'^{p}c'^{p}r'^{p}$ la suma de los tres exponentes **p** debe ser impar. Por lo tanto el valor de la **p** es impar. Porque si el exponente **p** es par entonces la suma de los exponentes de **a**, **c** y **r** sería par. Lo que es contradictorio.

Dado que $Q=d^{q}$, $Q=d^{n}/d^{p}$, $d^{q}=d^{n}/d^{p}$ y **q=n-p**, entonces es evidente que el valor de la **q** es par. Porque en la diferencia o suma de dos números impares, siempre resulta un número par. Luego el valor de la **q**, es un número par, por lo tanto se demuestra la **hipótesis 8**.

<u>**Hipótesis 9**</u>: **Si en la fórmula $acrQ=d^{n}$ y $Q=a'^{q}c^{n-1}r'^{q}k^{n}$ el valor de la r es igual a 1 y el valor de la c es un número primo mayor que 3, el valor de la k es una fracción irracional.**
**Demostración**:

Como **r =1**, $a=a'^{p}$, **p+q = n** y **a = c+r**, entonces **a =c+1** y **c = a-1**. De allí que $d^{n}=acQ$, $Q=a'^{q}c^{n-1}k^{n}$; $d^{n}=(a'^{p}c)(a'^{q}c^{n-1}k^{n})$, $d^{n}=a'^{n}c^{n}k^{n}$ y **d=a'ck**.

Dado que en la fórmula $b^{n}+c^{n}=a^{n}$, **a>b** y **a>c**, luego **b>d** y **a>d**. Si el valor de la **k** no fuera un cociente entonces tendríamos que **k=1**. Por lo que $d^{n}=a'^{n}c^{n}$. Demostremos si esta suposición es correcta.

Tenemos que **a>d** y **a=c+1**. En tal caso **a>a'c**, luego **|c+1|>a'c** y **|1+1/c|>a'**. Como el valor de la **a** es un número entero mayor que **1** es evidente que la desigualdad es falsa, y que **a' >|1+1/c|**. Por lo que **a'c>|c+1|**, **a'c>a**. Por lo tanto, **a'c>d** y $a'^{n}c^{n}>d^{n}$. Para que la igualdad **d=a'ck** sea válida, el valor de la **k** debe ser una fracción. Como $d^{n}=acQ$, $a'^{n}c^{n}>d^{n}$, $a'^{n}=a'^{p+q}$, entonces $a^{q}c^{n-1}>Q$. Por lo que se demuestra que el valor de la **Q** no puede contener al producto $a'^{q}c^{n-1}$.

¿Es el valor de la **k**, una fracción (cociente) racional o irracional? Demostremoslo. Dado que $a'^{q}c^{n-1}k^{n}=Q$, despejando $k^{n}$, tenemos que $k^{n}=Q/a'^{q}c^{n-1}$ y $k=(Q/a'^{q}c^{n-1})^{1/n}$. Por la demostración anterior, es evidente que el valor de la **k** es irracional.

<u>Hipótesis 10</u>: **Si en las fórmulas $d^{n}=acrQ$ y $Q=a^{n-1}c'^{q}r'^{q}k^{n}$ el valor de la a está formado por factores que son números primos, el valor de la k es una fracción irracional.**

**Demostración**:

Si **a=a'b'c'(…)t'** y los valores de **a', b', c', (…)** y **t'** son números primos, el valor de la **a** no se puede reducir a una potencia cuya base sea un número entero positivo. Por lo tanto esta **hipótesis** se demuestra por la **hipótesis 5**.

<u>Hipótesis 11</u>: **Si en las fórmulas $d^{n}=acrQ$ y $Q=a'^{q}c^{n-1}r^{n-1}k^{n}$ los valores de c y r están formados por factores que sean números primos, el valor de la k es una fracción irracional.**

**Demostración**:

Como **c=c'd'e'(…)**, **r=r' f' g'(…)t'** y dichos factores son números primos, los valores de **c** y **r** no se pueden reducir a potencias cuyas bases sean números enteros positivos. Por lo tanto esta **hipótesis** se demuestra por la **hipótesis 4**.

<u>Hipótesis 12</u>: **Si las fórmulas $d^{n}=acrQ$, $Q=a'^{q}c^{n-1}r'^{q}k^{n}$ y r=1, el valor de la c está formado por factores que son números primos, el valor de la k es irracional.**

**Demostración**:

Dado que **c=c'd'e'(…)t'** y dichos factores son números primos, el valor de la **c** no se puede reducir a una potencia cuya base sea un número entero positivo. En consecuencia, esta **hipótesis** se demuestra por la **hipótesis 9**.

<u>Hipótesis 13</u>: **El valor de la Q no contiene en su denominador los factores a, c y r**.

**Demostración**:

Si el valor de la **Q** es una serie formada por números enteros, entonces su valor es un número entero. Por lo tanto su denominador es **1** y el valor de la **Q** no contiene en su denominador a los factores **a, c** y **r**. De este modo se demuestra la **hipótesis**.

**Hipótesis 14**: **Si en la fórmula $b^n-r^n=a^n c^n r^n k^n$ se designa que los valores de b y r son números enteros positivos, los valores de a y c son irracionales.**

**Demostración**:

Tenemos que $a^n c^n r^n k^n=b^n-r^n$, eliminando $r^n k^n$ del primer miembro de la ecuación, resulta que $a^n c^n=(b^n/r^n-1)/k^n$ y $ac=(b^n/r^n-1)^{1/n}/k$. Como el valor de la **k** es irracional, el producto **ac** es irracional.

Designemos que $(b^n/r^n-1)^{1/n}/k=R$. En esta designación el valor de la **R** es irracional porque el valor de la **k** es irracional. Como $a=c+r$, entonces $(c+r)c=R$ y $c=(-r+(r^2+4R)^{1/2})/2$.

Si el valor de la **R** es irracional el valor de la **c** es irracional. Dado que $a=c+r$ es evidente que el valor de la **a** es irracional. En la **hipótesis 22** aclararemos algunos cuestionamientos que pudieran hacerse sobre este argumento.

**Hipótesis 15**: **En la fórmula $d^n=b^n-r^n$ el valor de la d es función de b y r.**

**Demostración**:

Dada la fórmula $d^n=b^n-r^n$, como al segundo miembro se le pueden asignar cualesquier valores a **b** y **r**, el valor de la **d** es función de los valores de **b** y **r**.

**Hipótesis 16**: **Las fórmulas $b^n+c^n=a^n$ y $d^n+r^n=b^n$ son simétricas o equivalentes entre sí.**

**Demostración**:

La fórmula $b^n+c^n=a^n$ la podemos transformar en ésta, $b^n=a^n-c^n$. Si se le asignan cualesquier valores a **a** y **c**, el valor de la **b** es función de los valores de **a** y **c**.

Ahora bien, transformemos la fórmula $d^n+r^n=b^n$ en $d^n=b^n-r^n$. Si se le asignan cualesquier valores a **b** y **r** la **d** es función de los valores de **b** y **r**.

Como las fórmulas $b^n+c^n=a^n$ y $d^n+r^n=b^n$ poseen una estructura exacta, entonces al tener las mismas propiedades, son simétricas o equivalentes entre sí.

**Hipótesis 17**: **En la fórmula a=c+r se puede considerar a los valores de a y c como variables y a la r como una constante.**
**Demostración**:

Si en la función $a=c+r$ designamos a la **r** como una constante el valor de la **a** varía en función del valor de la **c**.

**Hipótesis 18: En la fórmula a-c=r, se puede considerar a la diferencia a-c como función de la r.**

**Demostración**:

La diferencia **a-c** es directamente proporcional a la **r**. Y la constante de proporcionalidad de la **r** es **1**. Para los valores de la **r** no se necesitan conocer los valores de la **a** ni de **c** sino la diferencia. Por consiguiente en esta función el valor de la **r** es independiente de los valores de **a** y **c**. Por lo tanto, la **hipótesis** queda demostrada.

En cuanto a las propiedades de los valores de **a**, **c** y **r** éstos dependen de la definición de las funciones y de sus valores.

Una vez demostrada la fórmula $a^n-c^n-r^n=d^n$, aunque los valores de **a**, **c** y **r** sean números enteros positivos el valor de la **d** es irracional. Y además se demuestra que en la fórmula $d^n=b^n-r^n$ el valor de la **d** es irracional, para cualesquier valores enteros positivos de **b** y **r**, si el valor de **n** es un número impar mayor que **1**. De este modo, se demuestra el teorema $b^n+c^n=a^n$, si el valor de **n** es un número impar mayor **3**.

<u>**Hipótesis 19**</u>: **Si en la fórmula $b^n=acrQ+r^n$ designamos que $a=a'^n$, $c=c'^n$, $r=1$, $Q=q'^n$ y los valores de a', c' y q' son números enteros positivos, el valor de la b es irracional.**
**Demostración**:

Por la **hipótesis**, tenemos que $b^n=a'^n c'^n q'^n+1$, radicalizando la expresión por **n**, resulta que $b=(a'^n c'^n q'^n+1)^{1/n}$. Designemos que $a'c'q'=q$. Por lo que $b=(q^n+1)^{1/n}$. Como el valor de la **q** es un número entero positivo, el radical $(q^n+1)^{1/n}$ es irracional. Por lo tanto, el valor de la **b** es irracional. De este modo, se demuestra la **hipótesis**.

<u>**Hipótesis 20**</u>: **Si en la fórmula $d^n=acrQ$ se designa que $a=a'^n$, $c=a'^n$, $r=r'^n$, $Q=a'^q$, $p+g+q=n$ y los valores de a', r', p, g y q son números enteros positivos, el valor de la b es irracional en la fórmula $b^n=a^n-c^n$ si $a=c+r$.**
**Demostración**:

Tenemos que $a^n>c^n$ y $a>c$, si $a=a'^p$ y $c=a'^g$, entonces $p>g$. Como los valores de **p** y **g** son números enteros positivos, en la ecuación $p=g+g'$, el valor de la **g'** es un número entero positivo. Luego, resulta que $b^n=(a'^p)^n-(a'^g)^n$, $b^n=(a'^{g+g'})^n-a'^{gn}$, $b^n=a'^{gn}\,a'^{g'}-a'^{gn}$, $b^n=a'^{gn}(a'^{g'n}-1)$, $b=a'^g(a'^{g'n}-1)^{1/n}$. Hemos demostrado que la expresión $(a'^{g'n}-1)^{1/n}$ es irracional, por lo tanto, el valor de la **b** es irracional.

Si $b^n=acrQ+r^n$, $acrQ=d^n$, $r=1$ y el valor de la **d** es un número entero positivo, entonces el valor de la **b** en la fórmula $b=(d^n-1)^{1/n}$ es irracional.

En la suposición de que el valor de la **b** sea un número entero positivo, designamos que $r>1$, $Q>acr$, $acr=a'^e c'^i$, $Q=a'^g c'^h$, $a'^e>a'^g$, $c'^h>c'^i$, $e+g=n$, $h+i=n$ y que los valores de **a, c, r, Q, a', c', e, i, g** y **h** son números enteros positivos.

De allí que $acrQ=a'^e c'^i a'^g c'^h$, $d^n=a'^{e+g} c'^{i+h}$, $d^n=a'^n c'^n$ y $d=a'c'$. Si $a'^e>a'^g$, entonces $c'^h>c'^i$, $e>g$ y $h>i$. Según estas desigualdades designemos que $e=g+g'$ y $h=i+i'$, en que los valores de

**i'** y **g'** son números enteros positivos. Sustituyendo, tenemos que $\mathbf{a'^e=a'^g a'^{g'}}$; $\mathbf{c'^h=c'^i c'^{i'}}$, $\mathbf{a'^e=a'^{g+g'}}$ y $\mathbf{c'^h=c'^{i+i'}}$. La suma de los exponentes es **2g+g'=n** y **2i+i'=n**; siempre que $\mathbf{d^n=a'^n c'^n}$.

Para que el valor de la **b** sea un número entero positivo debemos suponer que en las fórmulas $\mathbf{b^n=a^n-c^n}$; **a=c+r**; $\mathbf{b^n-r^n=acrQ}$ y $\mathbf{d^n=b^n-r^n}$, los valores de **a, c** y **r** no deben ser números primos, ni impares y tampoco algunos de ellos debe ser impares. Los valores de **a, c** y **r** deben ser pares, pero sus componentes no pueden ser totalmente pares.

Si en la fórmula $\mathbf{b^n=a^n-c^n}$ los componentes de los valores de **a**, **c** y **r** fueran totalmente pares, el valor de la **a** sería un múltiplo del valor de la **c** y el valor de la **c** sería un múltiplo de la **r**, y el valor de la **b** sería irracional.

Para que el valor de la **b** sea un número entero positivo suponemos que los valores de **a**, **c** y **r** son pares. Y que el valor de la **a** y uno de los otros dos, contenga un número impar. La composición de los valores pares e impares debe ser tal, que las siguientes igualdades la designamos $\mathbf{a=a_p a_i}$, $\mathbf{c=c_p c_i}$ y $\mathbf{r=r_p}$, $\mathbf{c_p>a_p}$ ó $\mathbf{c_i>a_i}$, $\mathbf{r_p>c_p}$ y $\mathbf{r_p>a_p}$ y que los valores de $\mathbf{a_p}$, $\mathbf{c_p}$ y $\mathbf{r_p}$ son pares y los valores de la $\mathbf{a_i}$ y $\mathbf{c_i}$ son impares. De no ser así el valor de la **a** sería un múltiplo de **c** y el valor de la **c** un múltiplo de **r**, por lo que el valor de la **b** sería irracional.

En la igualdad $\mathbf{d^n=a'^n c'^n}$, uno de los valores de **a'** y **c'** debe ser par o impar; pero no totalmente pares o impares. **Con estas suposiciones no se puede demostrar que el valor de la d sea un número entero positivo o racional**. Sin embargo, hemos demostrado que el valor de la **k** es irracional en la igualdad **d=acrk**, por lo que el valor de la **d** es irracional.

De acuerdo a las designaciones anteriores, tenemos que **d=a'c'**. Sustituyendo, resulta que **acrk=a'c**. Si los valores de **a**, **c** y **r** fueran números enteros positivos y el valor de la **k** irracional entonces el producto **a'c'** sería irracional. El valor de la **d** no podría tener dos valores contradictorios uno irracional y el otro racional.

Hemos visto que el valor de la **k** no puede ser un cociente racional sino que debe ser irracional. Por lo tanto, no es posible que los valores de **a'** y **c'** sean simultáneamente números enteros positivos.

Sean las fórmulas $\mathbf{b^n=a^n-c^n}$, **a=c+r**, $\mathbf{b^n- r^n=acrQ}$, $\mathbf{d^n=b^n-r^n}$, $\mathbf{Q=(acr)^{n-1}k^n}$, $\mathbf{k=Q^{1/n}/(acr)^{(n-1)/n}}$; $\mathbf{d^n=(acr)^n k^n}$ y **d=acrk**.

En este argumento surge la objeción siguiente: Si designamos que **r=1** y los valores de **a** y **c** son números enteros positivos no se podría demostrar que el valor de la **b** es irracional en la fórmula $\mathbf{b^n=d^n+r^n}$.

Esto sólo es posible si se considera que el valor de la **d** es un número entero positivo. En esta **hipótesis** lo que interesa es que en las fórmulas $\mathbf{d^n=b^n-r^n}$ y **r=1**, el valor de la **d** debe tener un valor irracional. Y si **r>1** y sus valores son números enteros positivos el valor de la **d** es irracional.

Hemos demostrado que en las fórmulas $b^n-r^n=a^nc^nr^nk^n$ y $d^n=(acrk)^n$, si los valores de **a** y de **c** son números enteros positivos, el valor de la **k** es irracional.

Y si los valores de **b** y **r** son números enteros positivos ¿el valor de la **k** es irracional y lo mismo los valores de **a** y **c**?

En las fórmulas $b^n=a^n-c^n$, $a=c+r$ y $b^n-r^n=a^n-c^n-r^n$, si **n** es mayor que dos y los valores de **a** y **c** son números enteros positivos, el valor de la **b** debe ser irracional en la primera fórmula. Y si **n** es mayor que **2**, y los valores de **b** y **r** son números enteros positivos, entonces los valores de **a** y **c** deben ser irracionales.

Sea $b^n=a^n-c^n$, $a=c+r$ y $b^n-r^n=a^n-c^n-r^n$. Hemos demostrado que en la fórmula $(acrk)^n=a^n-c^n-r^n$, si los valores de **a**, **c** y **r** son números enteros positivos, el valor de la **k** es irracional. Y si el valor de la **k** no es irracional entonces en las fórmulas $d^n+r^n=a^n-c^n$, $b^n=a^n-c^n$ y $d^n=b^n-r^n$, el valor de la **b** es un número entero positivo.

Tenemos que $d^n=b^n-r^n$ y $a=c+r$. Si el valor de la **c** es irracional, también lo es **a** si el valor de la **r** es un número entero positivo o irracional.

Si el valor de **b** y **r** fuera un número entero positivo ¿el valor de la **d** es irracional? Lo es según las condiciones, definiciones y designaciones que hemos establecido. Si el valor de la **d** no es irracional, entonces en la fórmula $d^n=b^n- r^n$ los valores de **b**, **d** y **r** son números enteros positivos simultáneamente, si **n** es mayor que **2**. Y esto es contrario al enunciado del **Teorema de Fermat**.

En la fórmula $acrk=d$, si los valores de **a** y **c** son irracionales, el producto **ac** es irracional. Como $a=c+r$ el valor de la **r** puede ser un número entero positivo. Y si el valor de la **c** es irracional y el valor de la **r** es un número entero positivo el valor de la **a** es irracional. Por consiguiente el valor de **c, d** y **a** son irracionales si los valores de **b** y **r** son números enteros positivos.

En las fórmulas $b^n=a^n-c^n$, $a=c+r$, $(acrk)^n=b^n-r^n$, $d^n=(acrk)^n$ y $d^n=b^n-r^n$, las potencias $a^n$, $b^n$, $c^n$ y $r^n$ son números enteros positivos. Porque si en la fórmula $b^n=a^n-c^n$, los valores de **a** y **c** son números enteros positivos, el valor de la potencia $b^n$ es un número entero positivo. Y del mismo modo, si los valores de **a** y **c** son irracionales según el radical **1/n**, el valor de las potencias $a^n$ y $c^n$ son números enteros positivos. Pero si los valores de **a** y **c** son irracionales, entonces los valores de las potencias $a^{n-1}$ y $c^{n-1}$ son irracionales. Por lo tanto en la expresión $k=Q^{1/n}(acr)^{(n-1)/n}$, el valor de la **k** y de la potencia $k^n$ son irracionales.

En las fórmulas $b^n=a^n-c^n$, $a=c+r$, $Q=(acr)^{n-1}k^n$, $(acrk)^n=b^n-r^n$ y $d^n=b^n-c^n$, no podemos determinar de qué modo, si dos de los valores de **a**, **b** y **c** son números enteros positivos, el otro es irracional.

Como $d^n=b^n- r^n$, designemos que **b=r+p**. Efectuando las operaciones que hicimos con la anterior, tenemos que $d^n=brpQ'+p^n$, $brpQ'=d^n-p^n$; $Q'=(brp\ )^{n-1}k'^n$; $d'^n=(\ brpk')^n$, $d'^n=d^n-p^n$. Por lo que **d'=brpk'**. Como **d=acrk**, combinando ambas ecuaciones, resulta que **d/d'=acrk/brpk'**, **d/d'=ack/bpk'**, **dk'/d'k=ac/bp**.

Hemos visto que el valor de la **r** puede ser un número entero positivo, aunque los valores de **a** y **c** sean irracionales. Esta propiedad también la tiene el valor de la **p** por equivalencia. El valor de la **k** en la forma definida, es irracional. Y, también lo es el valor de **k'** por equivalencia, entonces el cociente **dk'/d'k** es irracional.

Si **a** es un múltiplo de **c** el valor de **b** es irracional. Si **b** es un múltiplo de **r** el valor de la **d** es irracional. Y si **d** es un múltiplo de **p** el valor de **d'** es irracional. Para obviar esto designemos que todos los valores de **a**, **b**, **c**, **d**, **p** y **r** son diferentes entre sí, por lo tanto, $k \neq k'$.

En la fórmula **dk'/d'k=ac/bp**, el valor de la **p** puede ser un número entero positivo o irracional. Y designemos que sea un número entero positivo. Según los valores de **a**, **b**, **c**, **p** y **r**, el cociente **dk'/d'k=ac/bp** es irracional, porque dichos valores no pueden ser simultáneamente números enteros positivos. Por consiguiente los cocientes **k'/k** y **ac/bp** son irracionales.

Entonces, si **a** y **c** son números enteros positivos el valor de la **b** es irracional. Y si **a=c+r** el valor de la **r** es un número entero positivo. Por lo tanto el valor de la **b** es irracional. En la igualdad **b=r+p** si el valor de la **r** es un número entero positivo, **b** y **p** son irracionales. Y si **b** y **r** son números enteros positivos los valores de **a** y **c** son irracionales.

Por consiguiente, si en la fórmula $(acrk)^n=b^n-r^n$, los valores de **b** y **r** son números enteros positivos, los valores de **a** y **c** son irracionales. Por ende, en la fórmula, según las designaciones y definiciones anteriores si los valores de **b** y **r** son números enteros positivos, el valor de la **d** es irracional.

En las fórmulas $b^n=a^n-c^n$ y **a=c+r**, el valor de **a** y **c** es irracional, si el valor de **b** y **r** es un número entero positivo, como se ha demostrado anteriormente.

Según las implicaciones matemáticas de las definiciones y designaciones que hemos establecido en las fórmulas $b^n=a^n-c^n$, **a=c+r**, $(acrk)^n=b^n-r^n$ y $d^n=(acrk)^n$, si los valores de **b** y **r** son números enteros positivos, el valor de la **d** es irracional, si **n** es mayor que **3**.

Entonces en la fórmula $d^n=b^n-r^n$ si **n >3** y **b** y **r** son números enteros positivos, el valor de **d** es irracional.

Si **a** y **c** son irracionales los valores de **Q** y $k^n$ los son también. Y para conocer la magnitud de la **c** si se conocen los valores de **b** y **r**, habría que despejar a la **c**.

Cuando en la fórmula **$acrQ=b^n-r^n$** los valores de **b** y **r** son números enteros positivos, el producto **$ac(a-c)Q$** no podría formar una potencia perfecta que se exprese como **$d^n$**. En la diferencia **$a-c=r$**, si la **r** es números enteros positivos, los valores de **a** y **c** pueden ser números enteros positivos o irracionales. Además, si los valores de **a**, **c** y **Q** son irracionales el valor del cociente **$k^n$** es irracional. Los detalles de este argumento lo explicamos en la parte final de este ensayo.

**<u>Hipótesis 21</u>: En la fórmula $d^n=acrQ$ el valor de la Q es diferente del valor de a, c y r**.

**Demostración**:

En la fórmula **$b^n=a^n-c^n$** el valor de la **b** depende de los valores de **a** y **c**. Pero no depende sólo del valor de **a** ó **c**, ya que también depende del valor de la serie que expresa **Q**. Por lo tanto, el valor de la **b** es diferente al valor de **a** y **c**.

Como **$a=c+r$**, restando **$r^n$** a la ecuación, tenemos que **$b^n- r^n= a^n -c^n-r^n$**. De este modo en la función **$r=a-c$**, el valor la de **r** depende de los valores de **a** y **c**. Luego, la diferencia **$b^n- r^n$** es función de los valores de **a** y **c**.

Designemos que **$b^n- r^n=d^n$**, de allí que **$d^n=a^n-c^n- r^n$**. El valor de la **d** es función de **a** y **c** y no de un solo valor. Dado que **$d^n=acrQ$**, entonces **$acrQ=a^n-c^n-r^n$**. Despejando **Q** tenemos que **$Q=(a^n-c^n-r^n)/acr$**. Es evidente que el valor de la **Q** depende de los valores de **a** y **c** y no de un solo valor.

Sea **$Q=na^{n-3}-(n(n-3)/2!)a^{n-5}cr+\ldots+(n(n+1)(n-1/2x3!)a^2c^{(n-5)/2}r^{(n-5)/2}-nc^{(n-3)/2}r^{(n-3)/2}$**, entonces **Q** es función de los valores de **a** y **c**.

Por lo anterior, si los valores de **b** y **d** son funciones de **a** y **c**, del mismo modo el valor de la **Q** es función de **a** y **c**. Por lo tanto, el valor de la **Q** es diferente de los valores de **a**, **c** y **r**. De este modo se demuestra la **hipótesis**.

Hemos supuesto que los valores de **c** y **r**, son números enteros positivos y, por ende los de **a**. Pero, si el valor de la **c** es irracional, con mayor razón el valor de la **k** es irracional. Sin embargo desde el momento en que se trate de despejar a la **c**, cambia su valor. Ya no se podría afirmar y designar que el valor de la **c** sea un número entero positivo. Porque al tratar de despejar a la **c**, lo que se determina es la magnitud de su valor y no si éste es un número entero positivo o irracional. Y es imposible determinar el valor de la magnitud de la **c**. De todos es conocido el **teorema de Niels Abel** de que **es imposible resolver la ecuación de quinta potencia**, y esta imposibilidad se extiende a todas las ecuaciones de potencias primas a partir de la quinta potencia.

Entonces queda claro que al despejar a la **c**, lo que se intenta determinar es la magnitud de su valor. El objetivo de las operaciones que hemos efectuado es la demostración de que el valor de la **c** es irracional. En este caso la suposición de que el valor de la **c** sea un número entero positivo mantiene su significado en tal hipótesis, porque su valor es función de **b** y **r**.

Además, tratar de despejar el valor de la **c** en función de su magnitud no es la finalidad del enunciado del **Teorema de Fermat**. Éste expresa que si en la fórmula $b^n+c^n=a^n$, dos de las bases de las potencias son números enteros positivos, la tercera no lo es cuando **n** es mayor que **2**.

Designemos que $a^n c^n k^n=e^n$ entonces $e^n=b^n/r^n-1$. Y si $r>1$ es evidente que $e^n<d^n$ y $e^n\neq d^n$. Como la **k** es irracional también lo es el valor de la **e**.

Si **a**, **c** y **ac** son irracionales en la fórmula $a^n c^n k^n=b^n/r^n-1$ es evidente que cualesquier valores que se le asignen a **b** y **r**, éstos son independientes del valor de la **e** en la fórmula $e^n=b^n/r^n-1$. Entonces el valor de la **e** es función de **b** y **r**. Por consiguiente, se demuestra que cualesquier valores que se le asignen a **b** y **r**, el valor de la **e** es irracional.

En la fórmula $b^n=a^n-c^n$, dividiendo por $c^n$, obtenemos que $b^n/c^n=a^n/c^n-1$. Designemos que $b^n/c^n=f^n$, por lo que $f^n=a^n/c^n-1$. Es evidente que las fórmulas $e^n=b^n/r^n-1$ y $f^n=a^n/c^n-1$ tienen una forma simétrica exacta y una estructura exactamente igual, aunque los valores sean diferentes en cada fórmula.

Y si el valor de la **e** es irracional el valor de la **f** también lo es. En consecuencia, las fórmulas $d^n=b^n-r^n$ y $b^n=a^n-c^n$ son iguales porque tienen una estructura exactamente igual. Y, si el valor de la **d** es irracional, también lo es el de la **b**.

Por consiguiente, queda demostrado que si en la fórmula $d^n+r^n= {}^n$ el valor de **n** es un número impar mayor que tres, los valores de **b**, **d** y **r** no pueden ser simultáneamente números enteros positivos. Por lo tanto, en la fórmula $b^n+c^n=a^n$, los valores de **a**, **b** y **c** no pueden ser simultáneamente números enteros positivos.

Y si en la fórmula $b^n+c^n=a^n$ el valor de **a** ó **c** es un número primo, o **a** y **c** son simultáneamente números primos, el valor de la **Q** en la fórmula $b^n-r^n=acrQ$ no puede contener los valores de $c^{n-1}$, $r^{n-1}$ y $a^{n-1}$ simultáneamente.

**Hipótesis 22**: **Si en la fórmula $b^n+c^n=a^n$ n es un número impar igual o mayor que tres y los valores de b y c son números enteros positivos, el valor de la a es irracional**.

**Demostración**:

**Supongamos** que en la fórmula $b^n+c^n=a^n$ los valores de **a**, **b** y **c** son números enteros positivos. De allí que, por inferencia de la suposición, en las fórmulas $b^n=a^n-c^n$ y $c^n=a^n-b^n$, los valores de **a**, **b** y **c** deben ser números enteros positivos en ambas fórmulas.

Se ha demostrado que en la fórmula $b^n=a^n-c^n$, si los valores de **a** y **c** son números enteros positivos y **n** es mayor que **2**, el valor de la **b** es irracional.

Y de igual modo en la fórmula $c^n=a^n-b^n$, si los valores de **a** y **b** son números enteros positivos, el valor de la **c** es irracional. Por lo que en ninguna de las fórmulas los valores de **a**, **b** y **c** pueden ser números enteros positivos simultáneamente, entonces, la **suposición** es falsa. Por consiguiente, si los valores de **b** y **c** son números enteros positivos, el valor de la **a** es irracional.

Hemos visto que la fórmula $b^n=a^n-c^n$, si los valores de **a** y **c** son números enteros positivos y **n** es mayor que **2**, el valor de la **b** es irracional.

Supongamos, que el valor de la **c** sea un número entero positivo. Para que el valor de la **b** sea un número entero positivo, el valor de $a^n$ debe ser un número entero positivo, de tal modo que en la diferencia $a^n-c^n$, el valor de la **b** sea un número entero positivo. Y si $a^n$ es ese número el valor de la **a** debe ser irracional. De este modo, se demuestra la **hipótesis**.

**DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE FERMAT CUANDO EN LA FÓRMULA $b^n+c^n=a^n$ EL VALOR DE LA n ES UN NÚMERO PRIMO MAYOR QUE 3**

<u>Hipótesis 23</u>: **Si en la fórmula $b^n+c^n=a^n$, el valor del exponente de la n es un número primo mayor que 3, los valores de a, b y c no pueden ser simultáneamente números enteros positivos.**

**Demostración**:

En la fórmula $b^n+c^n=a^n$, si los valores de $a^n$, $b^n$ y $c^n$ son números enteros positivos, entonces $a^n>b^n$ y $a^n>c^n$; por lo que **a>b** y **a>c**.

Designemos que en dicha fórmula **a** y **c**, sean números enteros positivos. Como **a>c**, entonces designamos que **a=c+r**. Por lo tanto, el valor de la **r** es un número entero positivo, de allí que **a-c=r**. Y como **a=c+r**, en la fórmula $b^n=a^n-c^n$, tenemos que $b^n=(c+r)^n-c^n$, por lo que designamos que $b^n-r^n=a^n-c^n-r^n$ y $b^n-r^n=(c+r)^n-c^n-r^n$.

Sea **n** un número primo mayor que **3**. Por la serie (**27a**) tenemos la relación:

$$b^n-r^n=nacr\{a^{n-3}-[(n-3)/2!]a^{n-5}cr+[(n-4)(n-5)/3!]a^{n-7}c^2r^2-[(n-5)(n-6)(n-7)/4!]a^{n-9}c^3r^3+$$
$$+\ldots+[(n+1)(n+3)(n+5)(n-1)(n-3)(n-5)/2^6x7!]a^6c^{(n-9)/2}r^{(n-9)/2}+$$
$$+[-((n+1)(n+3)(n-1)(n-3)]/2^4x5!)a^4c^{(n-7)/2}r^{(n-7)/2}+[(n+1)(n-1)/2^2x3!]a^2c^{(n-5)/2}r^{(n-5)/2}+$$
$$+(-c^{(n-3)/2}r^{(n-3)/2})\}\ .\ (17b)$$

De acuerdo a la serie (**27a**) si **n** es un número primo, todos los coeficientes iguales o mayores que **n** son exactamente divisibles por **n**. Designemos que

$Q=a^{n-3}-[(n-3)/2!]a^{n-5}cr+\ldots+[(n+1)(n-1)/2^2x3!]a^2c^{(n-5)/2}r^{(n-5)/2}-c^{(n-3)/2}r^{(n-3)/2}$ (**18b**) y que $b^n-r^n=d^n$, entonces $d^n=nacrQ$.

Supongamos que el valor de la **d** sea un número entero positivo y designemos que $Q=n^{n-1}a^{n-1}c^{n-1}r^{n-1}k^n$. Por lo que $b^n-r^n=nacr(n^{n-1}a^{n-1}c^{n-1}r^{n-1}k^n)$; $b^n-r^n=n^na^nc^nr^nk^n$ y $d=nacrk$.

En la demostración de este teorema, se siguen los mismos argumentos que la demostración anterior del teorema cuando el valor de **n** es impar y mayor que **3**, pero sólo expondremos los argumentos matemáticos más importantes.

¿Es el valor de la **k es** un número entero positivo o una fracción? Supongamos que los valores de la **a** y **c** sean números enteros positivos. Como $a=c+r$, el valor de la **r** también lo es. Por lo tanto, $a>c$ y $a>b$. Por las fórmulas anteriores, tenemos que $b^n=n^na^nc^nr^nk^n+r^n$ y $b^n=r^n(n^na^nc^nk^n+1)$. Como $a>b$ entonces es imposible que $c\geq1$ si $k\geq1$. Por consiguiente, el valor de la **k** es una fracción.

¿Es el valor de la **k**, una fracción racional o irracional? Hemos visto que si los valores de **c** y **a** son números enteros positivos, también lo es el de la **r**, porque $a=c+r$.

Tenemos que $k^n=Q/n^{n-1}a^{n-1}c^{n-1}r^{n-1}$. Supongamos que entre los posibles valores de la **c** y **r**, el valor de la **Q** sea una **(n-1)** potencia perfecta. Entonces $(k^n)^{1/(n-1)}$ es una **(n-1)** potencia perfecta. Pero $d^n=n^na^nc^nr^nk^n$, luego, $(d^n)^{1/(1-n)}=(n^na^nc^nr^n)(k^n)^{1/(1-n)}$. Por consiguiente, el valor de $(k^n)^{1/(1-n)}$ es irracional.

Supongamos que el valor de la **Q** sea una **n** potencia perfecta, que designamos como $Q=q^n$. De allí que $k^n=q^n/(n^{n-1}a^{n-1}c^{n-1}r^{n-1})$ y $k=q/(n^{n-1}a^{n-1}c^{n-1}r^{n-1})^{1/n}$. Es evidente que el denominador del cociente es irracional. En consecuencia, cualesquier valores que se les asignen a la **Q** el valor de la **k** es irracional.

¿Contiene el valor de la **Q** el producto $n^{n-1}a^{n-1}c^{n-1}r^{n-1}$? Supongamos que $Q=n^{n-1}a^{n-1}c^{n-1}r^{n-1}R^n$, y en que el valor de la **R** sea un número entero positivo. Pero $Q=n^{n-1}a^{n-1}c^{n-1}n^{n-1}k^n$. Por lo que $R^n=k^n$ y $R=k$. Como el valor de la **k** es una fracción irracional, entonces el valor de la **R** lo es también.

¿Podría el valor de la **Q**, contener como denominador al producto **nacr**? Imposible ya que el valor de la **Q** no es un cociente. Por ende, el valor de la **Q** no contiene el producto $n^{n-1}a^{n-1}c^{n-1}r^{n-1}$ si el valor de la **k** es una fracción irracional. Ni contiene al producto **nacr** en el denominador de tal modo que dicho producto pueda eliminarse del valor de la **d**, porque el denominador de **Q** es **1**.

Como la **k** es irracional y $d=nacrk$, entonces el valor de la **d** es irracional. También se demostraría así: Tenemos que $b^n-r^n=nacrQ$, $Q=n^{n-1}a^{n-1}c^{n-1}r^{n-1}k^n$ y $b^n-r^n=n^na^nc^nr^nk^n$. Si $k=1$ y

$a^n>b^n$, entonces $n^n a^n c^n r^n k^n>|b^n-r^n|$. Por lo tanto en la igualdad $b^n-r^n=n^n a^n c^n r^n k^n$ el valor de $k^n$ debe ser una fracción.

¿El valor de la $Q$ contiene los factores, $n^{n-1}$, $a^{n-1}$, $c^{n-1}$ y $r^{n-1}$ simultáneamente? Para que la $Q$ contenga dichos factores de modo simultáneo designemos que $k^n=1$. Luego, $Q=n^{n-1}a^{n-1}c^{n-1}r^{n-1}$, $b^n-r^n=nacr(n^{n-1}a^{n-1}c^{n-1}r^{n-1})$ y $b^n-r^n=n^n a^n c^n r^n$.

Como $a^n>b^n$, entonces $n^n a^n c^n r^n>|b^n-r^n|$. Por consiguiente, las igualdades $b^n-r^n=n^n a^n c^n r^n$ y $Q=n^{n-1}a^{n-1}c^{n-1}r^{n-1}$ son falsas. Por ende, $n^{n-1}a^{n-1}c^{n-1}r^{n-1}>Q$. En consecuencia el valor de la $Q$ no puede contener simultáneamente los factores $n^{n-1}$, $a^{n-1}$, $c^{n-1}$ y $r^{n-1}$.

Se puede objetar que la fórmula $b^n-r^n=a^n-c^n-r^n$ no sigue los lineamientos del **Teorema de Fermat**. Pero veamos lo siguiente: Tenemos que $b^n+c^n=a^n$, $b^n=a^n-c^n$ y $b^n-r^n=a^n-c^n-r^n$. Hemos designado que $a=c+r$ y $a^n-c^n-r^n=d^n$. Esta última fórmula la expresamos así: $d^n=nacrQ$.

Lo revelante de esta demostración, es que en la fórmula $d^n=b^n-r^n$ el valor de la $d$ es irracional, independientemente de cualesquier valores que se le asignen a $b$ y $r$ como números enteros positivos. Esta demostración es válida para todo valor de $n$ en tanto que su valor sea un número primo mayor que **3**.

No se trata de demostrar que $a^n-c^n-r^n=d^n$, sino que $d^n=b^n-r^n$. Y una vez que se resuelve el valor irracional de la $d$ se demuestra el **Teorema de Fermat** cuando $n>3$.

Tenemos que $b^n-r^n=n^n a^n c^n r^n k^n$. Factorizando $r^n$ en el primer miembro de la ecuación tenemos que $r^n(b^n/r^n-1)=n^n a^n c^n r^n k^n$. Eliminando $r^n$, tenemos que $b^n/r^n-1=n^n a^n c^n k^n$. En la estructura de la fórmula anterior la $k$ es irracional porque por definición $n>3$.

Despejando el producto $ac$ de la fórmula anterior, tenemos que $ac=(b^n/r^n-1)^{1/n}/nk$. En esta fórmula los valores de $b$ y $r$ son funciones del producto de $ac$. Y si le asignamos números enteros positivos a los valores de $b$ y $r$, el valor del producto $ac$ es irracional porque $k$ es irracional.

Como $a=c+r$ y $ac=c(c+r)$, sustituyendo, tenemos que $c(c+r)=(b^n/r^n-1)^{1/n}/nk$. Si designamos que $(b^n/r^n-1)^{1/n}/nk=R$, entonces $c^2+cr=R$. Despejando $c$, tenemos que $c=(-r\pm(r^2+4R)^{1/2})/2r$. Como el valor de $R$ es irracional entonces la $c$ es irracional y, por lo tanto, la $a$ también lo es si los valores de $b$ y $r$ son números enteros positivos.

De este modo, se demuestra que los valores de $a$ y $c$ son irracionales, si los valores de $b$ y $r$ son números enteros positivos. Y el valor de la $k$ es irracional, si $n>3$.

Si designemos que $n^n a^n c^n k^n=e^n$, entonces $e^n=b^n/r^n-1$, $e^n<d^n$ y $e^n\neq d^n$. Y como el valor de la $k$ es irracional también lo es el valor de la $e$.

Los valores de **a**, **c** y **ac** son irracionales en $n^n a^n c^n k^n = b^n / r^n - 1$, si **b** y **r** son números enteros positivos. Entonces es evidente que cualesquier valores que se les asignen a **b** y **r** los valores de **a** y **c** son irracionales. De este modo demostramos que los valores de **b** y **r** son independientes de la **e** en la fórmula $e^n = b^n / r^n - 1$, y que su valor es función de **b** y **r**. Por consiguiente, se demuestra que el valor de la **e** es irracional si se le asignan cualesquier números enteros positivos a **b** y **r**.

Ahora bien, si en la fórmula $b^n = a^n - c^n$ factorizamos por $c^n$, resulta que $b^n / c^n = a^n / c^n - 1$. Designemos que $b^n / c^n = f^n$. Luego, $f^n = a^n / c^n - 1$. Es evidente que las fórmulas $e^n = b^n / r^n - 1$ y $f^n = a^n / c^n - 1$ tienen una forma simétrica y una estructura exactamente igual, aunque los valores sean diferentes en cada fórmula.

Por lo tanto, si a **b** y **r** se le asignaran los mismos valores que a **a** y **c**, la **e** tendría el mismo valor que **f**. En consecuencia, las fórmulas $d^n = b^n - r^n$ y $b^n = a^n - c^n$ tienen una estructura exactamente igual. Y si en iguales condiciones el valor de la **d** es irracional también lo es el de la **b**.

En la fórmula $d^n + r^n = b^n$, los valores de **b**, **d** y **r** no pueden ser simultáneamente números enteros positivos cuando **n>3**. Por lo tanto, en la fórmula $b^n + c^n = a^n$, los valores de **a**, **b** y **c** no pueden ser simultáneamente números enteros positivos, cuando **n >3**.

<u>Hipótesis 24</u>: **Si en las fórmulas $b^n - r^n = nacrQ$, $b^n - r^n = d^n$, $d^n = nacrQ$, y designamos que $a = a'^n$, $c = c'^n$, $r = r'^n$, $Q = q'^n$, que los valores de a', c', r ', q' son números enteros positivos y n es un número primo mayor que 3, el valor de la d es irracional.**

**Demostración**:

Por la **hipótesis** tenemos que $d'^n = a'^n c'^n r'^n q'^n n$. Radicalizando por **n**, resulta que $d = a'c'r'q'n^{1/n}$. Como **n** es un número primo el valor de $n^{1/n}$ es un número irracional, por lo que la **d** es irracional. De este modo, se demuestra la **hipótesis**.

Hemos supuesto falsamente que $r = r'^n$ y que el valor de **r'** es irracional, si **a'** y **c'** son números enteros positivos. Pero, aún así el valor de la **d** resulta irracional.

Esta demostración de la fórmula $d^n = nacrQ$, se completa por las pruebas que hemos presentado de las proposiciones anteriores, en que $d^n = acrQ$.

Si en las fórmulas $b^n = a^n - c^n$, $a = c + r$, $b^n - r^n = acrQ$ y $Q = a^{n-1} c^{n-1} r^{n-1} k^n$, los valores de **a**, **b** y **c** son números enteros positivos. Y si **r=1**, el valor de **k** es irracional. Combinando las ecuaciones tenemos $b^n - r^n = acr(a^{n-1} c^{n-1} r^{n-1} k^n)$, $b^n - r^n = a^n c^n r^n k^n$. Si **r=1**, entonces $a^n c^n k^n = b^n - 1$, $ack = (b^n - 1)^{1/n}$, $k = (b^n - 1)^{1/n} / ac$.

Como el valor de $(b^n-1)^{1/n}$ es irracional el valor de **k** es irracional. Si **a** y **c** son números enteros positivos para que el valor de la **k** sea racional, **b** debe ser irracional. Cuando **r>1** sólo el valor de la **b** es un número entero positivo si la **k** es irracional. Y, si el valor de la **k** es irracional y, **a** y **c** son números enteros positivos, el valor de la **b** es irracional.

## DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE FERMAT CUANDO EN LA FÓRMULA $b^n+c^n=a^n$ EL VALOR DE LA n ES UN NÚMERO PAR

Un número par puede estar formado por uno o más factores pares y uno o más factores impares. Cuando un número está formado sólo por factores pares tiene como base el número **2**. Los números impares pueden estar formados por uno, o más factores primos o impares.

Si el exponente **n** es un número par que no tiene como base el número **2** lo expresamos así: **n=pi**, en que **p** es uno o más factores pares e **i** es uno o más factores impares. Por ejemplo, en el binomio $b^{254}+c^{254}=a^{254}$, el exponente **n** se descompone en **2** y **127**, en que **2** es par y **127** es impar o primo.

De acuerdo a la demostración de la fórmula $b^n+c^n=a^n$ en que el exponente **n** es un número impar, se deduce que si en la fórmula $(b^p)^i=(a^p)^i-(c^p)^i$, el valor del exponente **i** es un número impar igual o mayor que tres, y los valores de **a** y **c** son números enteros positivos, el valor de $b^p$ es irracional. Por lo tanto, el valor de la **b** en la expresión $(b^p)^{1/i}$, es irracional. De este modo, queda demostrado el **Teorema de Fermat** en la forma definida para el exponente par.

También podemos demostrar la siguiente proposición de acuerdo a la anterior, si **n** es par y mayor que **2**, pero no es constantemente par. Entonces, el valor de **n** se puede expresar como un número primo igual o mayor que **3**.

Si el valor de **n** es un número par pero no es constantemente par, entonces $n \neq 2^q$, en que el valor de **q** sea un número entero positivo igual o mayor que **2**. Luego, por definición designamos que **n=ip**, en que el valor de **i** es un número que contiene todos los factores impares y **p** es un número que contiene todos los factores pares.

Ahora bien, si el número impar **i** es un producto, y los factores que lo forman son números primos diferentes o números primos iguales, entonces podemos expresar el valor de **i** como **i=i'i''(…)** o $i=i'^q$, en que los valores de **i'**, **i''** y el símbolo **(…)** expresan otros números primos.

De allí que **n=p i'i''(…)** o $n=pi'^q$. Por lo tanto, cualesquier de los factores primos de **n** es un número primo mayor que **3**. Entonces podemos designar **n=i'm**, en que el valor de **i'** es un número primo y **m** es un número par.

De acuerdo a los argumentos anteriores, expresamos la fórmula $b^n+c^n=a^n$ como $(b^m)^{i'}+(c^m)^{i'}=(a^m)^{i'}$. En consecuencia, si en la fórmula $b^n+c^n=a^n$, el valor del exponente **n** es un número par mayor que **2** y no es constantemente par, en dicha fórmula el **Teorema de Fermat** se puede demostrar como si fuera un número impar o primo mayor que tres.

Como ya se ha demostrado la fórmula $(b^m)^{i'}=(a^m)^{i'}-(c^m)^{i'}$ en que el valor del exponente **i'** es un número primo igual o mayor que tres, entonces el valor de $b^m$ es irracional, si los valores de **a** y **c** son números enteros positivos.

**DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE FERMAT CUANDO EN LA FÓRMULA $b^n+c^n=a^n$ EL VALOR DE LA n ES UN NÚMERO PAR CONTINUO**

Si en la fórmula $b^n+c^n=a^n$, el valor del exponente **n** es un número par continuo los valores de **a**, **b** y **c** no pueden ser simultáneamente números enteros positivos.

Por la definición de **n** designemos que $n=2^p$, en que **p** es un número entero positivo. Como $n=2^p$, expresamos la fórmula $b^n+c^n=a^n$ así: $b^{2^p}+c^{2^p}=a^{2^p}$. (**19b**) Considerando la designación **a=c+r** y la fórmula (**28a**), establecemos la siguiente relación:

$$b^n-r^n=2cr[na^{n-2}/2-n(n-3)a^{n-4}cr/4+\ldots+n^2(n^2-2^2)a^4c^{(n-6)/2}r^{(n-6)/2}/384-n^2a^2c^{(n-4)/2}r^{(n-4)/2}/8+ +c^{(n-2)/2}r^{(n-2)/2}].\ (20b).$$

Los factores que contiene la serie (**20b**) muestran que el último término no es divisible por **a**. Más adelante demostraremos por qué el factor que expresa la serie, es un número entero positivo. Designemos que $na^{n-2}/2-n(n-3)a^{n-4}cr/4+\ldots+n^2a^2c^{(n-4)/2}r^{(n-4)/2}+c^{(n-2)/2}r^{(n-2)/2}=Q$ (**21b**) y $b^n-r^n=d^n$. Luego $d^n=2crQ$ (**22b**). En la demostración de este teorema, se siguen los mismos argumentos de la demostración del teorema cuando **n** es impar. En esta demostración solo expondremos los argumentos más importantes.

Para que el valor de la **d** sea supuestamente un número entero positivo designemos que

$Q=2^{n-1}c^{n-1}r^{n-1}k^n$ (**23b**). De allí que $b^n-r^n=2cr(2^{n-1}c^{n-1}r^{n-1}k^n)$, $b^n-r^n=2^nc^nr^nk^n$ (**24b**), $d^n=2^nc^nr^nk^n$ y **d=2crk** (**25b**).

Supongamos que el valor de la **k** sea un número entero positivo. Según las fórmulas (**19b**) y (**24b**), tenemos que $b^n=2^nc^nr^nk^n+r^n$, por lo que $b^n=r^n(2^nc^nk^n+1)$; $b=r(2^nc^nk^n+1)^{1/n}$.

Hemos demostrado que el valor de $(h^n+1)^{1/n}$ es irracional, cuando **h** es un número entero positivo. Si se considera que **c** y **k** son números enteros positivos, el valor de $(2^nc^nk^n+1)^{1/n}$ es irracional. En esta suposición, el valor de la **b** es irracional.

¿Es el valor de la **k** un cociente racional, cuando **r=1**? Supongamos que el valor de **k** sea un cociente racional. Y, para que esta suposición sea cierta designemos que **k=f /g** y **r=1**.

Tenemos que **d=2ck** y $d^n=a^n-c^n-1$. Si los valores de **a** y **c** son números enteros positivos el valor de $d^n$ también lo es. Y si el valor de la **d** es un número entero positivo siendo el valor de la **c** un número entero positivo, el valor de la **c** debe ser un múltiplo del valor de la **g**.

Designemos que **c=c'g**. Luego $b^n=2^n c'^n g^n f^n/g^n+1$, $b^n=2^n c'^n f^n+1$, $b=(2^n c'^n f^n+1)^{1/n}$. Si el valor de la **k** es un cociente racional, entonces el valor de **f** es un número entero positivo. Cuando **r=1**, el valor de la **b** es irracional. Y si el valor de la **k** es un cociente racional y **r=1**, el valor de la **b** es irracional.

Por lo que $b^n=2^n c'^n g^n r^n(f^n/g^n)+r^n$; $b^n=2^n c'^n r^n f^n+r^n$; $b^n=r^n(2^n c'^n f^n+1)$ y $b=r(2^n c'^n f^n+1)^{1/n}$. Y como **c'**, **f** y **r** son números enteros positivos el valor de la **b** es irracional.

Sea **c** un número primo y **r** un múltiplo de **g**. Si designamos que **r=r'g**, entonces $b^n=2^n c^n r'^n g^n(f^n/g^n) + r'^n g^n$; $b^n=2^n c^n r'^n f^n + r'^n g^n$; $b^n=r'^n(2^n c^n f^n+g^n)$; $b^n/r'^n =2^n c^n f^n+g^n$.

Como los valores de **c**, **f** y **g** son números enteros positivos el valor de la **b** es un múltiplo de **r'**. Por lo que **b=b'r'**. Entonces $b'^n=2^n c^n f^n+g^n$. Si se supone que el valor de la **r** sea un múltiplo de la **g**, no se puede demostrar que el valor de la **k** sea un cociente irracional.

Supongamos que los valores de **c** y **r** contengan en combinación el valor de la **g**. En tal caso, designemos que **cr=c'r'g**. De allí que **d=2c'r'g(f/g)**; **d=2c'r'f**. Como $b^n=2^n c^n r^n k^n+r^n$; $b^n=2^n c'^n r'^n f^n+r^n$. En esta última suposición, no se puede demostrar que el valor de la **k** sea un cociente irracional.

¿Es el valor de **k** un cociente mayor que **1**? Supongamos, que ello sea así. Como $a^n=2^n c^n r^n k^n+c^n+r^n$, luego $a^n/2^n c^n r^n=k^n+1/2^n r^n+1/2^n c^n$. Si $k\geq 1$, se puede suponer que $a^n>2^n c^n r^n$, por lo que **a>2cr**. Dado que **a=c + r**, sustituyendo, tenemos que $|c+r|>2cr$. Y Si dividimos la desigualdad por **cr**, resulta que $|1/r+1/c|>2$.

Esta desigualdad es cierta sólo si **r=1** y **c=1**. En este caso $b^n=2^n-1$, $b=(2^n-1)^{1/n}$. Por lo que el valor de la **b** es irracional.

Y si **c>r**, $r\geq 1$, la desigualdad $|1/r+1/c|>2$ es falsa, por lo tanto, $2>|1/r+1/c|$, $2cr>|c+r|$, **2cr>a**. Como $|2^n c^n r^n k^n+c^n+r^n|>2c^n r^n k^n$, entonces, para que la igualdad $a^n=2^n c^n r^n k^n+c^n+r^n$ sea cierta, el valor de la **k** debe ser menor que **1**. De este modo, se demuestra que el valor de la **k** es una fracción.

¿Es el valor de la **k**, una fracción racional o irracional? Supongamos, que los valores de **c** y **r** sean números enteros positivos. Tenemos que $k^n=Q/(2^{n-1} c^{n-1} r^{n-1})$ (**23b**). Supongamos, que entre los posibles valores de **c** y **r** el valor de la **Q** sea una **(n-1)** potencia perfecta. Entonces, el valor $(k^n)^{1/(n-1)}$ es una **(n-1)** potencia perfecta.

Y si el valor de la **Q** es una **(n-1)** potencia perfecta designemos que $Q=q^{n-1}$ en que el valor de la **q** sea un número entero positivo.

Por lo que $k^n=q^{n-1}/(2^{n-1} c^{n-1} r^{n-1})$ y $(k^n)^{1/(n-1)}=q/(2cr)$. Designemos que **k'=q/(2cr)**. Luego $(k^n)^{1/(n-1)}=k'$ y $k'^{n-1}=q^{n-1}/2^{n-1} c^{n-1} r^{n-1}$. Y si **q** es un número entero positivo, **k'** es un cociente racional. Pero $\mathbf{d^n= {}^n c^n r^n k^n}$. Luego $\mathbf{(d^n)^{1/n}=(2^n c^n r^n)^{1/n}(k^n)^{1/n}}$. Como $\mathbf{k^n=k'^{n-1}}$, entonces $\mathbf{(k^n)^{1/n}=(k'^{n-1})^{1/n}}$.

Como **n** es un número entero positivo es evidente que los valores de **n-1** y **n** son números consecutivos en una unidad. Por lo tanto la fracción **(n-1)/n** es un cociente. Siempre que el valor de **n** sea un número finito el cociente **(n-1)/n** no puede ser un número entero. Por consiguiente, el valor de la **k** en la expresión $\mathbf{(k^{\,n})^{1/n}=(k'^{n-1})^{1/n}}$ es irracional.

Supongamos que el valor de la **Q** sea una **n** potencia perfecta que designamos como $\mathbf{Q=q^n}$. De allí que $\mathbf{k^n=q^n/2^{n-1}c^{n-1}r^{n-1}}$, $\mathbf{k=q/(2^{n-1}c^{n-1}r^{n-1})^{1/n}}$ y $\mathbf{k=q/(2cr)^{(n-1)/n}}$. Si los valores de **q**, **c** y **r** son números enteros positivos, es evidente que el valor de la **k** es irracional.

Sea **Q** =$\mathbf{q^m}$ y en que el valor de **m** sea un múltiplo de **n**. En tal caso designemos que **m=tn**. Entonces tenemos que $\mathbf{k^n=q^{t\,n}/(2^{n-1}c^{n-1}r^{n-1})}$, $\mathbf{k=q^t/(2cr)^{(n-1)/n}}$. Por lo que es evidente que el valor de la **k** es irracional si los valores de **c, r, q, m, n,** y **t** son números enteros positivos.
En consecuencia, cualquier valor que se le asigne a la Q, el valor de la k es irracional.

¿Contiene $\mathbf{q^n}$, los factores $\mathbf{2^{n-1}c^{n-1}r^{n-1}}$ simultáneamente? Supongamos que $\mathbf{q^n=2^{n-1}c^{n-1}r^{n-1}R^n}$, en que la **R** sea un número entero positivo. Pero $\mathbf{q^n=2^{n-1}c^{n-1}r^{n-1}k^n}$. Por lo tanto, $\mathbf{R^n=k^n}$ y **R=k**. Por consiguiente, el valor de $\mathbf{R^n}$ es una fracción y **R** es una fracción irracional. Por consiguiente la potencia $\mathbf{q^n}$ no contiene los factores $\mathbf{2^{n-1}}$, $\mathbf{c^{n-1}}$ y $\mathbf{r^{n-1}}$ simultáneamente.

¿Podría la potencia $\mathbf{q^n}$ contener los factores **2**, **c** y **r** simultáneamente como denominador? Imposible ya que el valor de $\mathbf{q^n}$ es un número entero y no es un cociente.

Por ende, la $\mathbf{q^n}$ no contiene simultáneamente a los factores $\mathbf{2^{n-1}\ c^{n-1}\ r^{n-1}}$ si el valor de la **k** es un cociente racional. Ni tampoco contiene a los factores **2**, **c** y **r** como denominador de tal modo que dichos factores puedan eliminarse de la **Q**.

Como el valor de la **k** es irracional y **d=2crk**, entonces el valor de la **d** es irracional. Tenemos que $\mathbf{b^n\text{-}r^n=2^n c^n r^n k^n}$, si factorizamos $\mathbf{r^n}$ en el primer miembro de la ecuación, resulta que $\mathbf{r^n(b^n/r^n\text{-}1)=2^n c^n r^n k^n}$. Eliminando $\mathbf{r^n}$; tenemos que $\mathbf{b^n/r^n\ \text{-}1=2^n c^n k^n}$. Despejando la **c** resulta que $\mathbf{c=(b^n/r^n\text{-}1)^{1/n}/2k}$.

En esta fórmula, si a los valores de **b** y **r** se les asignaran números enteros positivos, siendo el valor de la **k** irracional, el valor de la **c** es irracional. En consecuencia dicha fórmula se torna independiente de la original.

Según la estructura de la fórmula anterior es evidente que el valor de la **c** es irracional en tanto se determine como una función de los valores de **b** y **r**.

Designemos que $\mathbf{2^n c^n k^n = e^n}$. Luego $\mathbf{e=2ck}$. Como el valor de la **k** es irracional, entonces el valor de la **e** es irracional.

Y si el valor de la **c** es irracional en la fórmula $\mathbf{2^n c^n k^n = b^n/r^n - 1}$, es evidente que cualesquier valores que se les asignen a **b** y **r**, sus valores son independientes del valor de la **e** en la fórmula $\mathbf{e^n = b^n/r^n - 1}$. Por lo que el valor de la **e** es función de los valores de **b** y **r**. Por consiguiente, se demuestra que cualesquier números enteros positivos, que se les asignen a **b** y **r**, el valor de la **e** es irracional.

Ahora bien, en la fórmula $\mathbf{b^n = a^n - c^n}$, factoricemos $\mathbf{c^n}$, entonces tenemos que $\mathbf{b^n/c^n = a^n/c^n - 1}$. Designemos que $\mathbf{b/c=f}$, luego $\mathbf{b^n/c^n = f^n}$ y $\mathbf{f^n = a^n/c^n - 1}$.

Es evidente que las fórmulas $\mathbf{e^n = b^n/r^n - 1}$ y $\mathbf{f^n = a^n/c^n - 1}$ tienen una forma simétrica y estructura iguales, aunque los valores sean diferentes en cada fórmula. Por lo tanto, si el valor de la **e** es irracional el valor de la **f** también lo es. En consecuencia, como las fórmulas $\mathbf{d^n = b^n - r^n}$ y $\mathbf{b^n = a^n - c^n}$ son iguales si el valor de la **d** es irracional en la primera fórmula, el valor de la **b** también lo es en la segunda fórmula.

Por consiguiente, queda demostrado que si en las fórmulas $\mathbf{d^n + r^n = b^n}$, el valor de **n** es un número constantemente par mayor que dos, los valores de **b**, **d** y **r** no pueden ser simultáneamente números enteros positivos. De allí que en la fórmula $\mathbf{b^n + c^n = a^n}$, los valores de **a**, **b** y **c** no pueden ser simultáneamente números enteros positivos si el valor del exponente de la **n** es un número constantemente par y mayor que **2**.

Si en la fórmula $\mathbf{b^n + c^n = a^n}$, $\mathbf{n=2^p}$ y el valor de **c** es un número primo, el valor de **c** no puede descomponerse en la potencia $\mathbf{c'^p}$ en que el valor de **c'** sea un número entero positivo, ni el valor de la **Q** puede contener el valor de **c**. Por lo que los valores de **k** y **d** son irracionales. Y cuando el valor de **n** es un número constantemente par la fórmula $\mathbf{b^n + c^n = a^n}$ se puede resolver de acuerdo al argumento anterior.

Designemos que $\mathbf{a=c+r}$. Efectuando las operaciones apropiadas, tenemos que

$$\mathbf{b^n - r^n = 2cr[nc^{n-2}/2 + n(n-1)c^{n-3}r/2x2! + n(n-1)(n-2)c^{n-4}r^2/2x3! + \ldots + n(n-1)(n-2)c^2r^{n-4}/2x3! + n(n-1)cr^{n-3}/2x2! + nr^{n-2}/2]}.$$

Es indudable que la fórmula anterior se puede demostrar con el argumento matemático aplicado en la solución del **Teorema de Fermat** $\mathbf{b^n + c^n = a^n}$ cuando el valor de **n** es constantemente par. También puede resolverse la ecuación $\mathbf{b^n + c^n = a^n}$ cuando el valor de **n** es un número primo.

Y en la serie

$$\mathbf{b^n - r^n = ncr(c^{n-2} + (n-1c^{n-3}r/2 + (n-1)(n-2)c^{n-4}r^2/3! + \ldots + (n-1)(n-2)c^2r^{n-4}/3! + (n-1)cr^{n-3}/2 + r^{n-2})},$$

es evidente que esta fórmula se puede resolver aplicando la forma general de los argumentos matemáticos anteriores.

Las estructuras de estas dos fórmulas son iguales a la estructura de la serie del binomio de Newton comenzando con el segundo término hasta el penúltimo.

## SOBRE LOS COEFICIENTES DEL BINOMIO DE NEWTON

En el argumento matemático que hemos expuesto para resolver el **Teorema de Fermat**, cuando el valor de **n** es un número constantemente par no demostramos que todos los coeficientes desde el segundo término hasta el penúltimo del **producto del binomio de Newton** son pares.

Si $\mathbf{n=2^p}$ entonces **n** se descompone siempre en números pares de acuerdo al desarrollo de la ley de los coeficientes del **binomio de Newton**.

El número de términos de la serie del producto del binomio de Newton es **n+1** en que **n** es el exponente del binomio. El coeficiente mayor, corresponde al término central de la serie. Dicho término lo expresamos así: $\mathbf{t_c=n/2+1}$, en que $\mathbf{t_c}$ es el término central y **n** es el exponente del binomio. El término anterior al término central es **n/2** y como $\mathbf{n=2^p}$, entonces $\mathbf{n/2=2^p/2}$; $\mathbf{2^p/2=2^{p-1}}$.

Según la ley del **binomio de Newton**, los coeficientes son cocientes en que los numeradores están formados por factores de los exponentes que decrecen constantemente en una unidad comenzando con **n**. Y los denominadores están formados por factores que expresan el número del término que aumenta constantemente en una unidad comenzando con **1**. Cuando $\mathbf{n=2^p}$ los factores pares que gana el numerador va de $\mathbf{2^p \rightarrow lím2^{n/2}}$. Los factores pares que gana el denominador va hacia $\mathbf{2 \rightarrow lím\ 2^{n/2-1}}$.

Para nuestro punto de vista, la demostración de que todos los coeficientes, desde el segundo término hasta el penúltimo de la serie del producto del **binomio de Newton**, son números pares y se debe demostrar por inducción matemática, si $\mathbf{n=2^p}$.Por lo que

$\mathbf{(c+r)(c+r)=c^2+2cr+r^2}$; $\mathbf{(c^2+2cr+r^2)^2=c^4+4c^3r+6c^2r^2+4cr^3+r^4}$;

$\mathbf{(c^4+4c^3r+6c^2r^2+4cr^3+r^4)^2=c^8+8c^7r+28c^6r^2+56c^5r^3+70c^4r^4+56c^3r^5+28c^2r^2+8cr^7+r^8}$,
y así sucesivamente. Como las operaciones son simétricas y los coeficientes desde el segundo hasta el penúltimo son pares; entonces todos los coeficientes, desde el segundo término hasta el penúltimo de la serie definida, deben ser pares.

Si este argumento no es suficiente porque aparenta alguna limitación entonces para la demostración de la fórmula $\mathbf{b^n+c^n=a^n}$, si el valor de **n** es un número constantemente par, se debe reducir al argumento matemático en la demostración de la fórmula $\mathbf{b^4+c^4=a^4}$. Veámoslo, a continuación en el siguiente análisis..

Sea $b^n+c^n=a^n$, en que $n=2^p$. Si **n** es mayor que **4**, luego **p=2+m**, por lo tanto, $n = 2^{2+m}$, en que **m=1, 2, 3, 4, 5,...,q lím→∞**. Por lo tanto, $n=2^2 2^m$, $n=4(2^m)$. Sustituyendo en la fórmula $b^n+c^n=a^n$, tenemos que $(b^{2^m})^4+(c^{2^m})^4=(a^{2^m})^4$.

Y como la fórmula $b^4+c^4=a^4$ está resuelta, entonces queda demostrado que si en la fórmula $b^n+c^n=a^n$ el valor de **n** es un número constantemente par y mayor que **4**, los valores de **a**, **b** y **c** no pueden ser números enteros positivos.

En la serie del producto del **binomio de Newton** $(c+r)^n$, si el valor del exponente **n** es un número primo, los coeficientes desde el segundo término hasta el penúltimo contienen como número entero al número primo **n**. Esta proposición se prueba por la ley de los coeficientes del producto del **binomio de Newton**.

Dada la serie del **producto del binomio de Newton** en que el valor de **n** sea un número primo:

$$(c+r)^n=c^n+nc^{n-1}r+n(n-1)/2!c^{n-2}r^2+n!/((n+1)/2)!((n-1)/2)!c^{(n-1)/2}r^{(n-1)/2}+...+$$

$$+n!/((n1)/2!((n+1)/2)!c^{(n1)/2}r^{(n1)/2}+...+(n-1)/2!c^2r^{n-2}+ncr^{n-1}+r^n.$$

La ley que determina los valores de los coeficientes de los términos del **producto del binomio de Newton** establece, en un orden sucesivo, que los coeficientes de los términos se forman multiplicando el coeficiente por el exponente de la potencia del término anterior y dividiendo este resultado por el número de dicho término en el orden de la serie del producto.

Tenemos que en la potencia del **binomio de Newton** $(c+r)^n=(c+r)(c+r)(...)(c+r)(c+r)$. Es evidente, que **c** se multiplica por sí mismo **n** veces. De allí que el primer término de la serie, es $c^n$. A partir de este primer término, se forman todos los demás.

Hemos indicado anteriormente, que el número de términos de la serie del producto del binomio de Newton es **n+1**. Por lo tanto el número del penúltimo término es **n**.

Ahora bien, como el coeficiente del segundo término de la serie del producto se forma por la operación **1xn/1=n**, los términos desde el segundo hasta el penúltimo contienen el valor de **n**, ya que **n** no se elimina en el proceso determinado de esa serie por ser un número primo cuyo valor es mayor que cualquier número del término del producto anterior al antepenúltimo término. Y el valor de **n** se elimina en el último término cuyo coeficiente resulta al dividir el cociente del penúltimo término por el número del penúltimo término multiplicado por **1** que es el valor del exponente. Como todos los coeficientes de los términos son números enteros por la ley del binomio de Newton, entonces los términos señalados conservan el número primo, por lo tanto, se demuestra la **hipótesis**.

Sea el **binomio de Newton** $(c+r)^n$ y que $n=p^m$. Luego $(c+r)^{p^m}$. El valor de **p** es un número primo y $m=1, 2, 3, 4,\ldots,q\rightarrow\text{lím}\infty$. Si el valor de **p** es un número primo, todos los coeficientes mayores que **1** del producto del binomio de Newton son divisibles por **p**, es decir, desde el segundo término hasta el penúltimo de la serie.

Hemos demostrado que si en la serie del producto del binomio de Newton $(c+r)^n$, el valor de **n** es un número primo, todos los coeficientes de los términos desde el segundo hasta el penúltimo son divisibles por **n**.

Y en la designación $n=p^m$, es evidente que el valor de **n** es una potencia que tiene como base un número primo. Designemos que $m=2,3,4,\ldots$, entonces tenemos que $(c+r)^{p^2}=((c+r)^p)^p$, $(c+r)^{p^3}=(((c+r)^p)^p)^p$, ...

Si todos los coeficientes de los términos, desde el segundo hasta el penúltimo, son divisibles por **p**, entonces todos los coeficientes de los términos en ese orden de los productos de los binomios $(c+r)^{p^2}$, $(c+r)^{p^3}$,$(c+r)^{p^4}$ y $(c+r)^{p^5}$ son divisibles por **p** ya que los productos de las multiplicaciones de cada uno de estos binomios son simétricos porque se multiplican **p** veces.

En el binomio $(c+r)^{p^2}=((c+r)^p)^p$, el binomio $(c+r)^p$ expresa su producto, ya que sería tedioso y muy complicado expresar el producto de cada binomio cuando **m=2,3,4,5…,100...** Para mayor claridad pongamos este ejemplo: $(c+r)^{5^2}$, en que **p=5** y **m=2**. Por lo que $(c+r)^{5^2}=((c+r)^5)^5$. Luego

$$[(c+r)^5]^5=(c^5+5c^4r+10c^3r^2+10c^2r^3+5cr^4+r^5)^5=$$
$$=c^{25}+25c^{24}r+300c^{23}r^2+\ldots+300c^2r^{23}+25c^{24}r+r^{25}.$$
$$(c+r)^{3^3}=\{[(c+r)^3]^3\}^3=[(c^3+3c^2r+3cr^2+r^3)^3]^3=(c^9+9c^8r+36c^7r^2+\ldots+36c^2r^7+9cr^8+r^9)^3=$$
$$=c^{27}+27c^{26}r+351c^{25}r^2+\ldots+20058300c^{14}r^{13}+20058300c^{13}r^{14}+\ldots+27cr^{26}+r^{27},$$

y así sucesivamente. Cada producto es simétrico con respecto al otro, porque es resultado de un mismo procedimiento de formación de los términos de la serie. Éste indica que se multiplica tantas veces como el número primo lo denota de un modo sucesivo, según sean los valores de **m**. La simetría consiste en que conserva en todos los productos el número primo **p** y en todos los coeficientes de los términos desde el segundo hasta el penúltimo.

Como $n=p^m$, en el binomio $(c+r)^{p^m}$, si **p** es un número primo mayor que **2** y **m** es un número entero positivo mayor que **1**, todos los coeficientes de los términos, desde el segundo hasta el penúltimo, son divisibles por **p** por inducción matemática.

Esta inducción matemática se basa en la configuración simétrica de los coeficientes del binomio de Newton $(c+r)^n$, en que $n=p^m$. Si $m=2,3,4,\ldots,q\rightarrow\text{lím}\infty$, entonces todos los coeficientes de los términos desde el segundo hasta el penúltimo del producto del binomio son divisibles por **p**, si éste valor es un número primo. Y no ocurre lo mismo, cuando el valor de **n** es un número compuesto por varios factores primos diferentes. Por ejemplo **n=pqs**, en que **p**, **q** y **s** sean números primos.

Si tenemos que **n=pqs**, luego $(c+r)^{pqs}=\{[(c+r)^p]^q\}^s$. Por lo que $\{[(c+r)^p]^q\}^s=[(c^p+pc^{p-1}r+p(p-1)c^{p-2}r^2/2+\ldots+p(p-1)c^2r^{n-2}/2+pcr^{p-1}+r^p)^q]^s$. Por lo tanto, ese producto se multiplica **q** veces por sí mismo y cuyo resultado se multiplica **s** veces por sí mismo. Entonces es evidente que cada producto no tiene la misma simetría.

En consecuencia, se demuestra que si en el binomio $(c+r)^n$, **n=pqs**, en que los valores de **p**, **q** y **s** son números primos diferentes, los coeficientes desde el segundo término hasta el penúltimo del producto del **binomio de Newton** no tienen la misma simetría.

Como un ejemplo consideremos el binomio $(c+r)^{30}$. Tenemos que **30=(2)(3)(5)**, entonces $(c+r)^{30}=(((c+r)^2)^3)^5$. Los coeficientes después del primer término de cada producto tienen una simetría diferente.

Y si $n=(pqs)^m$, en que $m=1,2,3,4,\ldots t\to \text{lím}\infty$, todos los coeficientes de los productos sucesivos no serán divisible simultáneamente por **pqs**, sino que algunos serán divisible por **p**, unos por **q** y otros por **s**. Y esa será la simetría de los productos sucesivos, según los valores que se le asignen a **m**.

Expliquemos ahora la serie de los coeficientes de los términos del **producto del binomio de Newton** transformado.

De acuerdo a la estructura de las series continuas de los productos del **binomio de Newton** se pueden establecer relaciones de los términos equidistantes de cada producto. Por ejemplo entre el primero y el último, entre el segundo término y el penúltimo, entre el tercer término y el antepenúltimo, y así sucesivamente.

Cuando el exponente del binomio es par el término del medio no puede relacionarse con otro, porque solo es uno. Y cuando el exponente **n** es impar todos los términos se pueden relacionar. Por la estructura de dichos términos, se pueden factorizar los términos equidistantes tal como lo muestran los productos de la serie (14a). Esto se basa en la ley del desarrollo de los términos del **binomio de Newton** $(c+r)^n$ cuando los valores de **n** son pares e impares, es decir, que el número del término del producto es **n+1**. Si el valor de **n** es impar, el número de términos es par, de allí que todo término tiene su pareja. Y cuando el valor de la **n** es par el número del producto es impar, por lo que el término del centro no tiene pareja.

Al factorizar los términos equidistantes del **producto del binomio de Newton**, se establece la siguiente relación, si **a=c+r** y el valor de **n** es impar.

$$a^n=(c+r)^n=c^n+r^n+ncr(c^{n-2}+r^{n-2})+n(n-1)c^2r^2(c^{n-4}+r^{n-4})/2+n(n-1)(n-2)c^3r^3(c^{n-6}+r^{n-6})/3!+$$
$$+n(n-1)(n-2)(n-3)c^4r^4(c^{n-8}+r^{n-8})/4+\ldots+n!/(((n+1)/2)!)((n-1)/2!)c^{(n-1)/2}r^{(n-1)/2}(c+r).\ (\mathbf{26b})$$

Hemos relacionado el primero y último término, pero éstos no pueden factorizarse porque no están formados por los factores **c** y **r**. La factorización de la serie debe entenderse como está expresada en el producto (**26b**).

¿Cómo deben formarse los coeficientes de los términos transformados del **producto del binomio de Newton**? Por lo menos elaboramos las tres fórmulas para calcular dichos coeficientes, según lo explicado anteriormente.

Si el **binomio de Newton** $(c+r)^n$, en que $c+r=a$, el valor del exponente **n** es un número impar, todos los términos equidistantes se factorizan entre sí, exceptuando el primer y último término. Por lo que proponemos la siguiente proposición: Si designamos que $c+r=a$, en el producto del binomio de Newton transformado, todos los términos son factorizados por **acr**, exceptuando los términos $c^n + r^n$.

En la serie de productos (**15a**), considerando los productos cuando **n=3,5,7,…,17…**; si transformamos el producto del binomio $(c+r)^{19}$, tenemos la siguiente serie:

$$\begin{aligned}(c+r)^{19}=&c^{19}+r^{19}+19cr(c^{17}+r^{17})+171c^2r^2(c^{15}+r^{15})+969c^3r^3(c^{13}+r^{13})+387c^4r^4(c^{11}+r^{11})+\\&+11628c^5r^5(c^9+r^9)+27132c^6r^6(c^7+r^7)+50388c^7r^7(c^5+r^5)+75582c^8r^8(c^3+r^3)+\\&+92378c^9r^9(c+r).\end{aligned}$$

De acuerdo a las series (**15a**), $c+r=a$, $c^3+r^3=a^3-3acr$, $c^5+r^5=a^5-5a^3cr+5ac^2r^2$; $c^7+r^7=a^7-7a^5cr+14a^3c^2r^2-7ac^3r^3,\ldots,$

Si efectuamos las correspondientes sustituciones es evidente que todos los términos desde el segundo en adelante son divisibles por **acr**. Por lo tanto, en todos los términos de los **productos transformados del binomio de Newton** de modo sucesivo, se factorizan por **acr**, por lo que se demuestra la proposición.

Cuando el valor de **n** es un número primo mayor que **2** es evidente que los coeficientes resultantes de la transformación se factorizan por **n**, exceptuando $c^n$ y $r^n$.

Hemos demostrado anteriormente que en el **producto del binomio de Newton** si el exponente **n** es un número primo, todos los coeficientes, desde el segundo término hasta el penúltimo, se factorizan por **n**. Por lo tanto, los resultados de las sumas de los términos resultantes se factorizan por el número primo **n**.

Si en la fórmula $b^n+c^n=a^n$, los valores de **b** y **c** son números positivos, entones **a** es mayor que **b** y **a** es mayor que **c**. De lo anterior, tenemos que $a^n-b^n=c^n$. Como **c** es un número positivo, entonces $a^n>b^n$, por lo que $(a^n>b^n)^{1/n}=|a>b|$. Por lo tanto **a** es mayor que **b**. Y del mismo modo se demuestra que **a** es mayor que **c**.

## DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE FERMAT PARA TODO VALOR DE n EN LA FÓRMULA $b^n+c^n=a^n$

**Si el valor de n es un número entero positivo arbitrario entonces el valor de n puede ser par e impar. Hemos demostrado que cuando el valor de n es par, para poder resolver el Teorema de Fermat, hay que reducir los factores de n en sus componentes**

**pares e impares y resolverlo por medio de un valor impar. Lo que significa que no se pueden determinar los términos finales del conjunto de los términos que se forman según sea n par o impar. Para determinar los primeros y últimos términos del conjunto, debemos valernos del binomio de Newton, admitiendo desde el segundo término hasta el penúltimo del binomio.**

Los conjuntos que hemos formado desde el segundo término hasta el penúltimo del **binomio de Newton** son los conjuntos (**17a**), (**18a**) y (**19a**). El (**17a**) se refiere a cualquier valor de **n**. Los (**18a**) y (**19a**) se refieren a los valores de **n** cuando son pares e impares.

Según las demostraciones que efectuamos del **Teorema de Fermat** cuando los valores de **n** son primos, impares, pares y constantemente pares o primos se llegan a ciertas conclusiones que pueden ser válidas para una demostración general del teorema, basadas en argumentos anteriores. Es decir, una demostración total del **teorema de Fermat** es imposible de lograr, si no se fundamenta en las demostraciones antes efectuadas, según este criterio.

Designando que $a=c+r$, $a^n=(c+r)^n$, establecemos esta relación:

$b^n-r^n=cr(nc^{n-2}+n(n-1)c^{n-3}r/2+\ldots+n(n-1)cr^{n-3}/2+nr^{n-2})$. (**27b**).
$Q=nc^{n-2}+n(n-1)c^{n-3}r/2+\ldots+n(n-1)cr^{n-3}/2+nr^{n-2}$ (**28b**).
$b^n-r^n=cr(na^{n-2}-n(n-3)a^{n-4}cr/2!+n(n-4)(n-5)a^{n-6}c^2r^2/3!-n(n-5)(n-6)(n-7)a^{n-8}c^3r^3+\ldots)$. (**29b**) y
$Q=na^{n-2}-n(n-3)a^{n-4}cr/2!+n(n-4)(n-5)a^{n-6}c^{2}r2^{2}/3!-n(n-5)(n-6)(n-7)a^{n-8}c^3r^3+\ldots$ (**30b**).

Las fórmulas (**27b**) y (**29b**) son equivalents, y lo mismo las (**28b**) y (**30b**).

De acuerdo a las demostraciones especificas y a estos criterios, elaboramos una demostración general a partir de las fórmulas (**27b**) y (**29b**). Designemos que $b^n-r^n=d^n$, $d^n=crQ$ y $Q=c^{n-1}r^{n-1}k^n$. La segunda fórmula se establece suponiendo que el valor de la **d** sea un número entero positivo. De acuerdo a las fórmulas (**27b**) y (**29b**) el valor de $k^n$ puede ser un cociente menor o mayor que **1**, según sea el valor de la **r**. Si esta suposición es cierta, el valor de la **Q** podría contener el producto $c^{n-1}r^{n-1}$.

<u>Hipótesis 25</u>: **Si en la fórmula $d^n=crQ$, $r=1$, el valor de la Q podría contener el producto $c^{n-1}r^{n-1}$.**

**Demostración**:

Sean $b^n=a^n-c^n$, $b^n-r^n=a^n-c^n-r^n$, $b^n-r^n=d^n$, $d^n=crQ$, $Q=c^{n-1}r^{n-1}k^n$, $a=c+r$ y $n>3$. Efectuando las operaciones apropiadas, tenemos $Q=(a^n-c^n-r^n)/cr$. Y Si $r=1$, entonces $Q=(a^n-c^n-1)/c$. Dado que $Q=c^{n-1}r^{n-1}k^n$, entonces $k^n=(a^n-c^n-1)/c^n$ y $k^n=(a/c)^n-1-1/c^n$.

Como $a=c+r$ y $r=1$, tenemos que $a=c+1$ y $c=a-1$. Es evidente que los valores de **a** y **c** son consecutivos en una unidad cuando $r=1$. Y $k^n$ puede ser menor o mayor que **1** según sea la magnitud de los valores de **c** y **n**. Lo que es evidente en la fórmula $k^n=(a/c)^n-1-1/c^n$. Si $(a/c)^n<2$, entonces $k^n<1$. Y si $(a/c)^n>2$ luego $k^n>1$.

Por lo tanto, en las fórmulas $d^n=c^n r^n k^n$, $d^n=crQ$ y $Q=c^{n-1}r^{n-1}k^n$, si $r=1$ y $k^n>1$ el valor de la **Q** contiene el producto $c^{n-1}r^{n-1}$. El límite de $k^n$ lo determinaremos más adelante.

<u>Hipótesis 26</u>: **Si $b^n=crQ+r^n$, r=1 y la Q contiene el producto $c^{n-1}r^{n-1}$, el valor de la b es irracional.**

**Demostración**:

Tenemos que $b^n=crQ+r^n$, $r=1$, $a>c$, $a>b$, $b>d$, $c=a-1$, $b^n=cQ+1$, $Q=c^{n-1}k^n$, $b^n=c^n k^n+1$, $d^n=b^n-1$ y $d^n=c^n k^n$, $d=ck$. Si $k>1$, $d>c$.

Como $d>c$, entonces $b>c$. Dado que $a>b$ y $c=a-1$, por lo que el valor de **b** está entre los valores de $(a-1)$ y **a**. Como $b^n$ es un número entero positivo y no es un cociente racional luego el valor de la **b** al no ser un cociente racional, debe ser un número irracional.

Si el valor de la **k** es menor que **1**, pero que está próximo a este número, entonces la expresión **ck** está entre **c-1** y **c**. Como $b^n$ es un número entero positivo y no es un cociente racional, por lo tanto el valor de la **b** al no ser un cociente racional debe ser un número irracional. Y cuando el valor de la **k** es menor que **1** de tal modo que el producto **ck** sea menor que la **c**, podemos determinar el valor de la **k** de un modo indirecto.

Tenemos que $b^n-r^n=d^n$, $r=1$, entonces $d^n=b^n-1$, $d=(b^n-1)^{1/n}$. Si el valor de la **b** es un número entero positivo, entonces el valor de la **d** es irracional. Como $ck=d$, luego el producto **ck** es irracional. Y si el valor de **b** y **r** es un número entero positivo el valor de la **c** no podría serlo. Hemos demostrado que el valor de la **c** es irracional cuando se despeja y se le asignan cualesquier números enteros positivos a **b** y **r**. Pero la demostración se basa en la irracionalidad del valor de la **k**. Entonces en la expresión $ck=d$, el valor de la **k** es irracional.

<u>Hipótesis 27</u>: **Si en la fórmula $d^n=crQ$ y $r>1$ el valor de la Q no podría contener el producto $c^{n-1}r^{n-1}$.**

**Demostración**:

Veamos, cuando el valor de la **r** es mayor que **1**. En la expresión: $k^n=(a^n-c^n-r^n)/c^n r^n$, cómo saber si el valor de $k^n$ es una fracción o no.

Consideremos todos los términos de $k^n$. Supongamos que $k^n=1$, entonces $a^n-c^n-r^n=c^n r^n$, $a^n=c^n r^n+c^n+r^n$, $a^n=c^n(r^n+1+r^n/c^n)$. Como $a=c+r$, entonces tenemos que $(c+r)^n=c^n(r^n+1+r^n/c^n)$, $c+r=c(r^n+1+r^n/c^n)^{1/n}$, $c=c(r^n+1+r^n/c^n)^{1/n}-r$,
$c=c((r^n+1+r^n/c^n)^{1/n}-r/c)$, $1=(r^n+1+r^n/c^n)^{1/n}-r/c$.

Si designamos que $(r^n+1+r^n/c^n)^{1/n}=r+d$, en que la **d** sea un número decimal, entonces $1=r+d-r/c$. Si $r>1$, $c>1$, $c=r$ y $c>r$, es evidente que $|r+d-r/c|>1$. Por lo que la igualdad $1=r+d-r/c$ es falsa. Por lo tanto, es falsa la igualdad $a^n-c^n-r^n=c^nr^n$. En consecuencia, $c^nr^n>|a^n-c^n-r^n|$ sólo si $r>1$.

Por consiguiente, se demuestra que cuando el valor de la **r** es mayor que **1**, el valor de la **Q** no puede contener los factores $c^{n-1}r^{n-1}$ por lo que $k^n$ es una fracción. De acuerdo a este argumento es posible demostrar el **Teorema de Fermat** y la desigualdad $c^nr^n>|a^n-c^n-r^n|$, cuando el valor de la **r** es mayor que **1**.

Supongamos que $c^nr^n=a^n-c^n-r^n$, si $c>1$ y $r>1$. Dividamos la igualdad por $c^nr^n$, tenemos que $1=a^n/c^nr^n-1/r^n-1/c^n$. En esta igualdad si $a>cr$ y **n** es muy grande entonces $a^n>>c^nr^n$.

Supongamos, pues, que $a^n=c^nr^n$, por lo que $a=cr$. Como $a=c+r$, sustituyendo, tenemos que $c+r=cr$. Dividiendo la igualdad por **cr**, resulta que $1/r+1/c=1$. Es evidente que si $r>1$ y $c>2$, la igualdad $1/r+1/c=1$ es falsa, por lo que $1>|1/r+1/c|$. Luego, $cr>|c+r|$, $cr>a$ y $c^nr^n>a^n$. Por lo tanto, la igualdad $1=a^n/c^n-r^n-1/r^n-1/c^n$ es falsa, entonces $1>|a^n/c^nr^n-1/c^n-1/r^n|$ y $c^nr^n>|a^n-c^n-r^n|$.

Dividamos la última desigualdad por $a^n$ luego $c^nr^n/a^n>|1-(c^n/a^n+r^n/a^n)|$. Como $a>c$ y $a>r$ asignémosle a **c** y **r** los valores mínimos. Entonces, $c=2$ y $r=2$. Sustituyendo en la desigualdad tenemos que $1>|1-1/2^{n-1}|$. Por lo tanto la desigualdad $c^nr^n>|a^n-c^n-r^n|$ es cierta si $c>1$ y $r>1$.

Hemos demostrado que si $r>1$ se puede demostrar el **Teorema de Fermat** en la forma general de demostración. Pero, si $r=1$, el valor de **Q** puede contener los valores de $c^{n-1}r^{n-1}$, por lo que el valor de $k^n$ puede ser mayor que **1**. Examinemos cuáles son los límites de $k^n$, para que el valor de la **b** sea supuestamente un número entero positivo si los valores de **a** y **c** son números enteros positivos y **n** sea mayor que **3**.

Anteriormente hemos demostrado que en la fórmula $b^n=a^n-c^n$, si el valor de **n** es igual o mayor que **c**, el valor de la **b** es irracional. Por lo tanto, podemos suponer que sólo el valor de la **b** puede ser un número entero positivo, si el valor de **n** es menor que el valor de **c**.

De este modo, podemos demostrar que en la fórmula $b^n=a^n-c^n$, el valor de $k^n$ debe tener ciertos límites, si el valor de la **c** es menor en una unidad que el de **a** y el valor de **n** es igual o menor que **c**.

Si en la fórmula $b^n+c^n=a^n$, $n=c$, $a=c+r$ y $r=1$. Entonces $b^c=a^c-c^c$. Como $Q=c^{c-1}r^{c-1}k^c$ y $a=c+1$, luego $Q=c^{c-1}k^c$ y $b^c-1=cQ$, luego $a^c-c^c-1=c^ck^c$; $k^c=(a^c-c^c-1)/c^c$; $k^c=a^c/c^c-1-1/c^c$; $k^c=(c+1)^c/c^c-1-1/c^c$; $k^c=((c+1)/c)^c-1-1/c^c$; $k^c=(1+1/c)^c-1-1/c^c$.

Cuando **c=1, 2, 3, 4,…, qlím**$\rightarrow\infty$, por lo tanto los límites de $k^c$ se establecen cuando $c=1$ y **c** tiende al infinito. Para el primer valor $k^c=(1+1/1)^1-1-1/1=0$. Y para el segundo valor,

$k^c = c\to lím\infty(1+1/c)^c - 1 - 1/c$. Dado que $\varepsilon = c\to lím\infty(1+1/c)^c$, sustituyendo, tenemos que $k^n = \varepsilon - 1 - 1/c^n$. En dicho límite $1/c^n = 0$, entonces $k^n = \varepsilon - 1$.

Estos límites indican que el valor de $k^c$ es mayor que cero y menor que $(\varepsilon-1)$ cuando el valor de la **c** es menor en una unidad que el valor de **a**, y el valor de la **n** es menor que **c** y mayor que dos. **El valor de ε es la base de los logaritmos naturales**.

Hemos demostrado que si el valor de la **k** es un número entero positivo, el valor de la **b** es irracional para todo valor de **n** y, también, que en las fórmulas $b^2+c^2=a^2$ y $b^2-r^2=2cr$ no existe la necesidad de vincularlas con $k^2$, ya que dichas ecuaciones contienen una incógnita que es **c** y que a los valores de **b** y **r** se le pueden considerar como constantes y que esas fórmulas se expresan en una ecuación de primer grado, por lo que puede resolvérsele y asignársele cualesquier números enteros positivos o racionales. El valor de $k^n$ se justifica cuando **n** es mayor que **3**.

En consecuencia, la única dificultad en la demostración directa del **Teorema de Fermat**, $b^n+c^n=a^n$, consiste cuando el valor de la **c** es menor en una unidad que el valor de la **a**. En tal caso $b^n=d^n+1$, $b=(d^n+1)^{1/n}$. Y el valor de la **b** es irracional, si el valor de la **d** es un número entero positivo. Y cuando **b** es un número entero positivo entonces el valor de $k^n$ es un cociente. Porque si el valor de la **k** es un número entero positivo el valor de la **b** es irracional.

<u>Hipótesis 28</u>: **Si en la fórmula $b^n=a^n-c^n$ el valor del exponente n es mayor que 3 y los valores de a, b y c no pueden ser simultáneamente números enteros positivos, del mismo modo que en la fórmula $a^n=b^n+c^n$, si el exponente n es mayor que 3, los valores de a, b y c no pueden ser simultáneamente números enteros positivos**.

Si se demuestra el **Teorema de Fermat** en la forma $b^n=a^n-c^n$, significa que para todos los valores de **a** y **c**, como números enteros positivos, el valor de la **b** es irracional, siempre y cuando **n** sea mayor que tres.

En este caso los valores de **a** y **c** comprenden todos los números enteros positivos mayores que **3**. Como $b^n=a^n-c^n$, entonces $b^n+c^n=a^n$. Si los valores de **a** y **c** son números enteros positivos, el valor de la **b** es irracional. Del mismo modo, se demuestra que si los valores de **a** y **b** son números enteros positivos el valor de la **c** es irracional.

Ahora bien, supongamos que en la fórmula $a^n=b^n+c^n$ el valor del exponente **n** es mayor que tres y que los valores de **b** y **c** son números enteros positivos y también lo es el valor de la **a**. Por lo tanto, según esta suposición, los valores de **a**, **b** y **c** pueden ser simultáneamente números enteros positivos en la fórmula $a^n=b^n+c^n$, lo que niega el **Teorema de Fermat** para la fórmula $b^n=a^n-c^n$.

En consecuencia, si en la fórmula $b^n=a^n-c^n$ los valores de **a**, **b** y **c** no pueden ser números enteros positivos simultáneamente si el valor del exponente **n>3**, ¿entonces esta demostración es válida para la fórmula $\mathbf{a^n=b^n+c^n}$, ya que esta última se deduce de la primera según el procedimiento para despejar a la potencia $\mathbf{a^n}$.

Por consiguiente, si en la fórmula $\mathbf{a^n=b^n+c^n}$, $\mathbf{n>3}$ y los valores de la **b** y la **c** son números enteros positivos el valor de la **a** es irracional.

Hemos demostrado que si **n** es un número impar mayor que **3**, el **Teorema de Fermat** se demuestra para cualquier valor de **n**. La dificultad se presenta cuando el valor de **n** es par y el valor de la **c** es menor en una unidad que el valor de la **a**. Si el valor de la **r** es mayor que **1**, el teorema se demuestra sin dificultad, aunque el valor de **n** sea par. Sin embargo, el teorema definido de esa forma se resuelve por reducción a la forma impar si el valor de la **n** está constituido por un número par y un número impar. También dicho teorema se puede resolver cuando el exponente de la **n** es un número constantemente par.

Ahora bien, ¿en qué consiste estaa dificultad? Si en la fórmula $\mathbf{b^n=a^n-c^n}$, el valor de la **c** es menor en una unidad que el valor de la **a** y el valor de **n** es un número par y es menor que el valor de la **c**, para ciertos valores de **a**, **c** y **n** el valor de la **Q** puede contener el valor $\mathbf{c^{n-1}}$. Entonces es válido suponer que $\mathbf{Q=c^{n-1}(m/p)^n}$, en que $\mathbf{m>p}$ y $\mathbf{p=cq}$. Como $\mathbf{d^n=cQ}$, entonces, $\mathbf{d^n=c^n(m/cq)^n}$, $\mathbf{d=c(m/cq)}$, $\mathbf{d=m/q}$. Dado que la **d** no puede ser una fracción, designamos que $\mathbf{m=gq}$, por lo que $\mathbf{d=gq/q}$, $\mathbf{d=g}$. ¿Este argumento se puede aplicar cuando $\mathbf{k^n}$ es una fracción? Veamos si este argumento es posible.

Hemos demostrado que si los valores de **c** y **r** son mayores que **1** el valor de la **Q** no puede contener a los factores $\mathbf{c^{n-1}r^{n-1}}$. Hemos designado que $\mathbf{Q=c^{n-1}r^{n-1}k^n}$ en la suposición de que el valor de la **d** sea un número entero positivo.

Suponiendo que el valor de la **k** sea una fracción racional, designemos que $\mathbf{k=m/p}$, $\mathbf{m<p}$, $\mathbf{p=crq}$ y $\mathbf{m=gq}$. Sustituyendo, tenemos que $\mathbf{Q=c^{n-1}t^{n-1}(gq/crq)^n}$. Luego, $\mathbf{c^{n-1}r^{n-1}g^nq^n/c^nr^nq^n=Q}$; $\mathbf{Q=g^n/cr}$. Para que el valor de la **Q** no sea una fracción, designemos que $\mathbf{g=hcr}$. Luego, $\mathbf{Q=(hcr)^n/cr}$; $\mathbf{Q=h^nc^{n-1}r^{n-1}}$. Si **h** es un número entero positivo, entonces $\mathbf{b^n=crQ+r^n}$; $\mathbf{b^n=h^nc^nr^n+r^n}$; $\mathbf{b^n=r^n(h^nc^n+1)}$; $\mathbf{b=r(h^n+1)^{1/n}}$.

Hemos demostrado que el valor de $\mathbf{(h^nc^n+1)^{1/n}}$ es irracional, por lo que el valor de la **b** es irracional. De acuerdo a las definiciones establecidas, es falso que el valor de la **Q** contenga los factores $\mathbf{c^{n-1}r^{n-1}}$. Por lo tanto el valor de la **h** es un cociente. Y como $\mathbf{h=k}$ no se demuestra que el valor de la **k** sea un cociente racional. En consecuencia, según el argumento anterior no demuestra que el valor de la **k** sea racional. El carácter irracional del valor de la **k** se demuestra por los argumentos que hemos propuesto anteriormente.

De las demostraciones anteriores, son suficientes los argumentos matemáticos que elaboramos cuando el valor de **n** es impar o constantemente par. Cuando el valor de **n** es par compuesto por números pares e impares, entonces la forma par se reduce a la forma impar. Y de este modo, se resuelve el **Teorema**. Ahora bien, basándonos en los argumentos básicos que expresamos en las **demostraciones específicas, elaboramos una demostración general del Teorema de Fermat**.

Por lo que en la fórmula $\mathbf{k^n=Q/c^{n-1}r^{n-1}}$ afirmamos que el valor de **k** es irracional, porque así se deduce de las otras demostraciones.

Designemos que $\mathbf{b^n\text{-}r^n=acrQ}$, $\mathbf{b^n\text{-}r^n=cr(c^{n-1}r^{n-1}k^n)}$, $\mathbf{b^n\text{-}r^n=c^nr^nk^n}$ y $\mathbf{c^nr^nk^n=d}$, entonces, **d=crk**. Como **k** es irracional entonces el valor de la **d** es irracional.

Ahora bien, tenemos que $\mathbf{r^n(b^n/r^n\text{-}1)=c^nr^nk^n}$, luego $\mathbf{b^n/r^n\text{-}1=c^nk^n}$, $\mathbf{c=(b^n/r^n\text{-}1)/k}$. Como el valor de la **k** es irracional, el valor de la **c** es irracional, aunque los valores de **b** y **r** sean números enteros positivos. Y como **a=c+r** el valor de la **a** es irracional.

Designemos que **e=ck**, luego, $\mathbf{e^n=b^n/r^n\text{-}1}$. En la fórmula $\mathbf{b^n=a^n\text{-}c^n}$; $\mathbf{b^n/c^n=a^n/c^n\text{-}1}$ y designemos que **b/c=f**. Entonces, $\mathbf{f^n=a^n/c^n\text{-}1}$. Las fórmulas $\mathbf{e^n=b^n/r^n\text{-}1}$ y $\mathbf{f^n=a^n/c^n\text{-}1}$ son simétricas o tienen una estructura equivalente. Por lo tanto, si el valor de la **e** es irracional en la fórmula $\mathbf{e^n=b^n/r^n\text{-}1}$, el valor de la **f** es irracional en la fórmula $\mathbf{f^n=a^n/c^n\text{-}1}$.

Por consiguiente, las fórmulas $\mathbf{d^n\text{-}\ b^n\text{-}\ r^n}$ y $\mathbf{b^n=a^n\text{-}\ c^n}$ tienen una estructura exactamente igual. Y si el valor de la **d** es irracional también lo es el de la **b**.

En consecuencia, queda demostrado que si en la fórmula $\mathbf{d^n+\ r^n=b^n}$, el valor de **n** es mayor que **3**, los valores de **b**, **d** y **r** no pueden ser simultáneamente números enteros positivos. Por lo tanto, en la fórmula $\mathbf{b^n+c^n=a^n}$, si **n** es mayor que **3**, los valores de **a**, **b** y **c** no pueden ser simultáneamente números enteros positivos.

**Explicación**:

Como en la fórmula $\mathbf{b^n=a^n\text{-}c^n}$, la **b** es función de **a** y **c**, si los valores de $\mathbf{b^n}$, **a** y **c** son números enteros positivos, por lo tanto **a >c**. De acuerdo a esa desigualdad, **a-c=r**, por lo que **r** es la diferencia de **a** y **c**.

Si los valores de **a** y **c** son números enteros positivos el valor de **r** también lo es, y **b** es irracional cuando el exponente **n** es mayor que dos. Pero si los valores de **b** y **r** son números enteros positivos entonces los valores de **c** y **a** son irracionales. Y como **a = c+r** si el valor de la **c** es irracional y el de la **r** es un número entero positivo, entonces el valor de la **a** es irracional.

Por esta razón la diferencia $\mathbf{b^n\text{-}\ r^n}$ se constituye en una fórmula que hemos expresado como $\mathbf{b^n\text{-}r^n=d^n}$. Y ésta es independiente de $\mathbf{b^n=a^n\text{-}\ c^n}$, aunque estén relacionadas entre sí. De este modo, se puede resolver el **Teorema de Fermat**.

Según la **hipótesis 20** el cociente **ac/bp** debe ser irracional porque el valor del cociente **dk'/d'k** es irracional si los valores de **a**, **c**, **r**, **b** y **p** son interdependientes. En esta relación estos dos cocientes son irracionales cuando **n≥3**.

En la fórmula $b^3-r^3=3acr$, es evidente que el valor de la **Q** es **1**. En tal caso, sea **Q=1** y $1=(3acr)^2k^3$, entonces tenemos que $k=1/(3acr)^{2/3}$. Efectuando las sustituciones y las operaciones correspondientes, resulta que $3acrk^3=d^3$. Sin embargo, el valor de $k^3$ en esta fórmula es igual a **1**, porque $d^3=3acr$.

## CONCLUSIÓN

Para resolver el **Teorema de Fermat**, elaboramos la demostración por medio de hipótesis. En esta demostración no es necesario despejar el valor de **c** porque esta solución no consiste en efectuar ese procedimiento, sino en demostrar que el valor de la **c** es irracional.

En la fórmula $b^n - r^n = d^n$, cuando el valor de **n** es impar y mayor que **3** designamos que $d^n = acrQ$ y que los valores de **a**, **c**, **r** y **Q** expresan valores de números diferentes. Lo esencial en la demostración del **Teorema**, es que el valor de la **c** sea irracional.

Se puede objetar, que en ciertas fórmulas de $b^n = a^n - c^n$ el valor de la **c** no está determinado de modo específico. Por ejemplo, cuando expresamos la fórmula $b^9 = a^9 - c^9$ en la forma cúbica $(b^3)^3 = (a^3)^3 - (c^3)^3$. En esta fórmula despejamos $c^3$, y encontramos que su valor es irracional. Entonces con mayor razón el valor de la **c** es irracional. Este procedimiento no altera la demostración, de que el valor de la **c** sea irracional si los valores de **b** y **r** son números enteros positivos. Porque si el valor de la **c** es irracional, también lo es el valor de la **a**. Entonces, se mantiene el valor de la **r** como número entero positivo.

Las hipótesis plantean otro problema, que consiste en que una demostración general del **Teorema de Fermat** debe basarse en dos demostraciones especiales de dicho teorema. El problema se debe a la ley que determina la composición del valor de la **n** en las fórmulas de exponente impar y constantemente par. Y cuando el valor de **n** es primo podemos lograr este resultado: $b^n - r^n = nacrQ$. Porque en la serie del **binomio de Newton**, en las fórmulas que calculan cada uno de los coeficientes de los términos todos los coeficientes son números enteros positivos. Por lo tanto que es evidente que el valor de **n** como número primo está contenido en los coeficientes de todos los términos y que se expresa en la fórmula $b^n - r^n = nacrQ$.

Cuando el valor del exponente de la **n** es un número constantemente par, dicho exponente es una potencia perfecta cuya base es **2**. De allí que el resultado de dicha diferencia de potencias así determinadas es **2crQ**, calculándose de este modo, lo irracional del valor de la **k**.

Cuando el valor de **n** es un número entero positivo compuesto por uno o más números impares y con uno o más números pares, de acuerdo a la ley de los exponentes de números pares, todos los coeficientes no son exactamente divisibles por **n**, por un factor par de **n** ni por un factor impar de **n**. La demostración de dicha fórmula la hemos efectuado por el procedimiento de reducción. Es decir que el exponente **n** definido de esa manera, al contener un factor impar se puede resolver convirtiendo la fórmula con exponente par, en una con exponente impar. Y si esa solución no llegara a satisfacer las exigencias requeridas, entonces se resuelve en el esquema general de solución del **Teorema de Fermat** o su reducción en **(n/4)4**, si el exponente par es divisible por **4**.

Ahora bien, en la fórmula (**19b**), sería imposible despejar el valor de la **c**. De acuerdo al teorema de **Niels Abel** no se puede resolver la ecuación de quinto grado ni las ecuaciones en que el exponente **n** sea un número primo mayor que **5**, porque en tal caso se utilizaría un esquema de solución semejante al de **Niels Abel**. Además, si en la fórmula (**29b**) se despejara el valor de la **c** la igualdad equivalente no demostraría si el valor de la **c** es racional o irracional.

El lector no debe sorprenderse de que hemos omitido citas o referencias bibliográficas de algún matemático que haya tratado de demostrar de modo completo, el **Teorema de Fermat**, puesto que hasta la fecha (1992) dicho teorema no se ha resuelto. Entonces no tiene importancia que descartemos las obras que solucionan el teorema de modo parcial, porque esto más bien hubiera complicado nuestro objetivo de procurar una solución completa del **Teorema de Fermat**. Además tendríamos que haber ampliado la extensión del texto de esta demostración.

**Carlos Chuez es profesor titular de filosofía de la Universidad de Panamá. Nació el 19 de febrero de 1936 en Santiago de Veraguas. Obtuvo el bachillerato en humanidades en el Instituto Nacional, en el año 1957. Estudió en la Universidad de Panamá y obtuvo la licenciatura y el grado de profesor de filosofía e historia en 1973.**

**Posteriormente, viajó a México donde hizo estudios de maestría en la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). El profesor Chuez realizó estudios de doctorado en la Universidad Complutense de Madrid y ha publicado ensayos sobre matemáticas, física y filosofía en revistas y periódicos de la localidad.**

$c^9+r^9=a^9-9a^7cr+27a^5c^2r^2-30a^3c^3r^3+9ac^4r^4.$
$c^{10}+r^{10}=a^{10}-10a^8cr+35a^6c^2r^2-50a^4c^3r^3+25a^2c^4r^4-2c^5r^5,$
$c^{11}+r^{11}=a^{11}-11a^9cr+44a^7c^2r^2-77a^5c^3r^3+55a^3c^4r^4-11ac^5r^5,$
$c^{12}+r^{12}=+a^{12}-12a^{10}cr+54a^8c^2r^2-112a^6c^3r^3+105a^4c^4r^4-36a^2c^5r^5+2c^6r^6,$
$c^{13}+r^{13}=a^{13}13a^{11}cr+65a^9c^2r^2156a^7c^3r^3+182a^5c^4r^491a^3c^5r^5+13ac^6r^6.$
$c^{14}+r^{14}=a^{14}-14a^{12}cr+77a^{10}c^2r^2-210a^8c^3r^3+294a^6c^4r^4-196a^4c^5r^5+49a^2c^6r^6-2c^7r^7$, $c^{15}+r^{15}=a^{15}-15a^{13}cr+90a^{11}c^2r^2-275a^9c^3r^3+450a^7c^4r^4-378a^5c^5r^5+140a^3c^6r^6-15ac^7r^7$, $c^{16}+r^{16}=a^{16}-16a^{14}cr+104a^{12}c^2r^2-352a^{10}c^3r^3+660a^8c^4r^4$ [illegible] $r^5+336a^4c^6r^6$ $64a^2c^7r^7+2c^8c^8,$
$c1^7+r^{17}=a^{17}-17a^{15}cr+119a^{13}c^2r^2-442a^{11}c^3$ [illegible] $1122a^7c^5r^5++714a^5c^6r^6-204$ [illegible]

En la serie (15), una fó[illegible] depende de las [illegible] pares anteriores. Y del [illegible]o, una fórmula impar depende de las fórmulas im[illegible]tes Por ejemplo, en la fórmula (14), transforme[illegible]ulas $a^{16}$ y $a^{17}$. Factoricemos los términos equidista[illegible] de la fórmula $a^{16}$.

$a^{16}=c^{16}+16cr(c^{14}+r^{14})+120c^2r^2(c^{12}+r^{12})+560c^3r^3(c^{10}+r^{10})+1820c^4r^4(c^8+r^8)+4368c^5r^5(c^6+r^6)+8008c^6r^6(c^4+r^4)+11440c^7r^7(c^2+r^2)+12870c^8r^8+r^{16}$. Hagamos lo mismo $a^{17}$.

[illegible] $136c^2r^2(c^{13}+r^{13})+680c^3r^3(c^{11}+r^{11})+2380c^4r^4(c^9+r^9)+$